GHEORGHE ADALBERT SCHNEIDER

Memorator și îndrumar de matematică

ALGEBRĂ - PENTRU LICEU

Destinat elevilor pentru:
- lucrul la clasă;
- examenul de bacalaureat;
- admitere în facultăți.

Matematica
BIBLIOTECA ȘCOLARULUI

GHEORGHE ADALBERT SCHNEIDER

MEMORATOR ŞI ÎNDRUMAR DE MATEMATICĂ

ALGEBRĂ

PENTRU LICEU

EDITURA HYPERION

Această lucrare a fost elaborată în conformitate cu programele școlare actuale aprobate de Ministerul Educației și Cercetării.

Comenzi pentru cărțile editurii noastre se pot face la următoarea adresă de e-mail:
editurahyperion@yahoo.de
sau la tel. / fax 0251-531133
sau la telefon 0744628656

Copyright © Editura Hyperion

Descrirea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
SCHNEIDER, GHEORGHE-ADALBERT
Memorator și îndrumar de matematică: algebră pentru liceu / Gheorghe-Adalbert Schneider, - Craiova: Hyperion, 2012
Bibliogr.
ISBN 978-606-589-006-0
512(075.35)

1. Mulțimi și elemente de logică matematică

1.1 Mulțimea numerelor reale

1.1.1 Numere reale

1) Mulțimea numerelor naturale: $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \cdots, \}$.

2) Mulțimea numerelor întregi: $\mathbf{Z} = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots, \}$.

3) Mulțimea numerelor raționale: $\mathbf{Q} = \left\{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbf{Z}, n \neq 0\right\}$.

4) Mulțimea numerelor iraționale, formată din numerele reprezentate de o fracție zecimală, infinită, neperiodică și pe care o notăm $\mathbf{R} - \mathbf{Q}$.

5) Mulțimea numerelor reale: $\mathbf{R} = \mathbf{Q} \cup (\mathbf{R} - \mathbf{Q})$.

Evident au loc relațiile:

a) $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$ b) $\mathbf{R} - \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$ c) $\mathbf{Q} \cap (\mathbf{R} - \mathbf{Q}) = \varnothing$.

6) O fracție ordinară $\frac{m}{n}$ este ireductibilă dacă c.m.m.d.c. $(m, n) = 1$.

Exemple: $\frac{2}{5}, \frac{7}{15}, \frac{3}{8}$.

7) O fracție ordinară $\frac{m}{n}$ este reductibilă dacă există cel puțin un număr prim prin care fracția se poate simplifica.

Exemple: $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$, $\frac{12}{16} = \frac{3}{4}$.

8) Fracțiile ordinare care reprezintă numărul rațional $\frac{m}{n}$ se transformă în fracție zecimală după formula: $\frac{m}{n} = a, a_1 a_2 a_3 \cdots$.

Exemple: $\frac{1}{3}$ =0, (3) - fracție zecimală periodică simplă

$\frac{5}{12}$ =0,41(6) - fracție zecimală periodică mixtă.

1.1.2 Operații algebrice cu numere reale

Operațiile algebrice pe mulțimea numerelor reale sunt: adunarea și înmulțirea. Ele se definesc ca extensii ale operațiilor

de adunare și înmulțire din mulțimea numerelor raționale.

a) Proprietățile adunării

1) Asociativitatea: $(x+y)+z=x+(y+z)\ (\forall)x,y,z\in\mathbf{R}$;
2) Comutativitatea: $x+y=y+x\ (\forall)x,y\in\mathbf{R}$;
3) Element neutru 0: $x+0=0+x=x\ (\forall)x\in\mathbf{R}$;
4) Element opus: : $x+(-x)=(-x)+x\ (\forall)x\in\mathbf{R}$; numărul $-x$ se numește opusul lui x.

b) Proprietățile înmulțirii

1) Asociativitatea: $(xy)z=x(yz)\ (\forall)x,y,z\in\mathbf{R}$;
2) Comutativitatea: $xy=yx\ (\forall)x,y\in\mathbf{R}$;
3) Element neutru 1: $x\cdot 1=1\cdot x=x\ (\forall)x\in\mathbf{R}$;
4) Element inversabil : $x\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{x}\cdot x=1\ (\forall)\ x\in\mathbf{R},\quad x\neq 0$; numărul $\frac{1}{x}$ se numește inversul lui x.

c) Proprietate de legătură între înmulțire și adunare

1) Distributivitatea înmulțirii față de adunare:

$$x(y+z)=xy+xz\ (\forall)x,y,z\in\mathbf{R}.$$

Observație. Ca operații derivate ale adunării și înmulțirii se pot defini operațiile de scădere și împărțire.
a) $x-y=x+(-y),(\forall)x,y\in\mathbf{R}$;
b) $x:y=x\cdot\frac{1}{y}$, $y\neq 0$.

1.1.3 Calcule cu numere reale reprezentate prin litere

a) Formule de calcul prescurtat

1) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$;
2) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$;
3) $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$;
4) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$;

5) $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$;
6) $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$;
7) $(a-b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc$;
8) $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$;
9) $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$;
10) $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$, $n \geq 2, n \in \mathbf{N}$;
11) $a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1})$, $n \geq 2,\ n \in \mathbf{N}$, impar.

b) Alte formule algebrice utile

1) $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$;
2) $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$;
3) $a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 = [(a+b)^2 - 2ab]^2 - -2a^2b^2$;
4) $a^5 + b^5 = (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$;
5) $a^6 + b^6 = (a^2 + b^2)^3 - 3a^2b^2(a^2 + b^2)$;
6) $a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2ab - 2ac - 2bc$;
7. $a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc =$
$= \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]$;
8) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - -ac - bc) = \frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]$.
9) $(a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 = 3(a+b)(b+c)(c+a)$.

c) Proprietățile puterilor cu exponent întreg

1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;
2) $a^m : a^n = a^{m-n}, a \neq 0$;
3) $(a^m)^n = a^{mn}$;
4) $(ab)^m = a^m \cdot b^m$;
5) $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$, $b \neq 0$.

Aplicații

1. Să se arate că dacă $a, b \in \mathbf{R}$, astfel încât $a + b = 1$, atunci:
a) $a^2 + b^2 = 1 - 2ab$ b) $a^3 + b^3 = 1 - 3ab$.

Soluție: Se aplică formulele **1)** și **2)** de la **1.1.3** b).

2. Să se arate că dacă $a, b, c \in \mathbf{R}$, astfel încât $a + b + c = 0$, atunci: $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

Soluție: Se aplică formula **8)** de la **1.1.3** b).

3. Să se descompună în factori:

$$a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b).$$

Soluție: $a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b) = a^2b - a^2c + b^2c - b^2a + c^2a - c^2b = ab(a - b) - c(a^2 - b^2) + c^2(a - b) = (a - b)(ab - ac - bc + c^2) = (a - b)(b - c)(a - c)$.

1.1.4 Ordonarea numerelor reale

Introducem pe **R** relațiile $<$ respectiv $\leq$ astfel:
a) $x < y$ dacă $y - x > 0$;
b) $x \leq y$ dacă $y - x \geq 0$.

a) Proprietatea de trihotomie. Oricare ar fi $x, y \in \mathbf{R}$ este adevărată una și numai una din relațiile $x < y, x = y, x > y$.

b) Proprietățile relației $\leq$:
1) $x \leq x, (\forall) x \in \mathbf{R}$ (reflexivitate);
2) $x \leq y, y \leq x \Rightarrow x = y$ (antisimetrie);
3) $x \leq y, y \leq z \Rightarrow x \leq z$ (tranzitivitate).

Relația $\leq$, este reflexivă, antisimetrică și tranzitivă și deci este o **relație de ordine** pe mulțimea **R**.

Relația $<$ este tranzitivă, dar nu este reflexivă și antisimetrică și deci nu este relație de ordine pe mulțimea **R**.

c) Relația $\leq$ este o **relație de ordine totală** pe **R**, deoarece $(\forall) x, y \in \mathbf{R}$ avem $x \leq y$ sau $y \leq x$.

d) Proprietăți de legătură ale relației $\leq$ cu operațiile de adunare și înmulțire:

1) $x \leq y, z \in \mathrm{R} \Rightarrow x + z \leq y + z$;

2) $x \leq y, z \leq t \Rightarrow x + z \leq y + t$;

3) $x \leq y, z > 0 \Rightarrow xz \leq yz$;

4) $x \leq y, z < 0 \Rightarrow xz \geq yz$;

5) $x \leq y, z \leq t,\ x > 0, y > 0, z > 0, t > 0$, implică $\Rightarrow xz \leq yt$.

Aplicații

1. Să se compare numerele: $a = 2^{99}$ și $b = 9^{33}$.

Soluție: $a = 2^{99} = (2^{11})^9 = 2048^9$; $b = 9^{33} = 3^{66} > > 3^{63} = 2187^9$. Atunci $a = 2048^9 < 2187^9 = b$. Deci $a < b$.

2. Fiind dat $a \in \mathbf{R}$, să se compare numerele: $2a$ și $a + 1$.

Soluție: $2a \leq a + 1 \Leftrightarrow a \leq 1$ și $2a > a + 1 \Leftrightarrow a > 1$. Deci, dacă $a \leq 1$, ordinea este $2a, a + 1$, iar dacă $a > 1$, ordinea este $a + 1, 2a$.

1.1.5 Modulul unui număr real

Definiție. Valoarea absolută sau modulul unui număr real x se definește astfel: $|x| = \begin{cases} x, \text{ dacă } x \geq 0 \\ -x, \text{dacă } x < 0 \end{cases}$.

Proprietăți:

1) $|x| \geq 0, (\forall) x \in \mathbf{R}$;

2) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

3) $|-x| = |x|, (\forall) x \in \mathbf{R}$;

4) $|xy| = |x| \cdot |y|, (\forall) x, y \in \mathbf{R}$;

5) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|},\ (\forall) x, y \in \mathbf{R}, \mathrm{y} \neq 0$;

6) $\big||x| - |y|\big| \leq |x + y| \leq |x| + |y|, (\forall) x, y \in \mathbf{R}$;

7) $|x| = a \Leftrightarrow x = \begin{cases} 0, \text{ dacă } a = 0 \\ \pm a, \text{ dacă } a > 0 \end{cases}$;

8) $|x| < a, a > 0 \Leftrightarrow -a < x < a$;
9) $|x| > a, a > 0 \Leftrightarrow x < -a$ sau $x > a$.

Aplicații

1. Rezolvați în **R** ecuațiile:

a) $|x+2| = 6$ b) $\big|x - |x+1|\big| = 1$.

Soluție. a) $|x+2| = 6 \Leftrightarrow x + 2 = \pm 6 \Leftrightarrow x = 4$ sau $x = -8$.

b) $\big|x - |x+1|\big| = 1 \Leftrightarrow x - |x+1| = \pm 1 \Leftrightarrow |x+1| = x - 1$ și $|x+1| = x + 1$.

1) Dacă $x \leq -1$, ecuațiile devin: $-x - 1 = x - 1$ și $-x - 1 = x + 1$ cu soluțiile $x = 0$ și $x = -1$, corectă fiind doar -1.

2) Dacă $x > -1$, ecuațiile devin: $x + 1 = x - 1$ și $x + 1 = x + 1$. Prima ecuație nu are soluție, iar a doua ecuație are soluție orice $x > -1$.

1.1.6. Aproximări, trunchieri, rotunjiri

1) Fiind dat numărul real pozitiv $x = a, a_1 a_2 \ldots a_n \cdots$ atunci:

a) aproximația prin lipsă de ordinul n a lui x este:

$$x_n' = a, a_1 a_2 \ldots a_n$$

b) aproximația prin adaos de ordinul n a lui x este:

$$x_n'' = a, a_1 a_2 \ldots a_n + 10^{-n}.$$

2) Fiind dat numărul real negativ $x = -a, a_1 a_2 \ldots a_n \cdots$ atunci:

a) aproximația prin lipsă de ordinul n a lui x este:

$$x_n' = -a, a_1 a_2 \ldots a_n - 10^{-n}$$

b) aproximația prin adaos de ordinul n a lui x este:

$$x_n'' = -a, a_1 a_2 \ldots a_n.$$

3) Fiind dat numărul real $x = a, a_1 a_2 \ldots a_n \cdots$ atunci trunchierea de ordinul n a lui x este $x_n' = a, a_1 a_2 \ldots a_n$.

4) Fiind dat numărul real $x = a, a_1 a_2 \ldots a_n a_{n+1} \cdots$ atunci rotunjirea lui x la a *n*-a zecimală se calculează astfel:

a) Dacă $a_{n+1} \in \{0,1,2,3,4\}$, atunci $x_n = a, a_1 a_2 \dots a_n$.
b) Dacă $a_{n+1} \in \{5,6,7,8,9\}$, atunci $x_n = a, a_1 a_2 \dots a_n + 10^{-n}$.

Aplicații

1) Scrieți pentru $a = \sqrt{3}$ și $b = -\sqrt{3}$:

a) aproximațiile zecimale de ordinul 2;
b) trunchierile de ordinul 3;
c) rotunjirile la a 4-a zecimală.

Soluție. $\sqrt{3} = 1{,}7320508\cdots$ și $-\sqrt{3} = -1{,}7320508\cdots$.
a) $a_2' = 1{,}73, a_2'' = 1{,}74$ și $b_2' = -1{,}74, b_2'' = -1{,}73$.
b) $a_2' = 1{,}732$ și $b_2' = -1{,}732$.
c) $a_2 = 1{,}7321$ și $b_2 = -1{,}7321$.

1.1.7 Partea întreagă și partea fracționară a unui număr real

Axioma lui Arhimede. Pentru orice număr real x, există și este unic numărul întreg n astfel încât $x \in [n, n+1)$.

Definiție. Fiind dat numărul real x, numim partea întreagă a lui x și o notăm cu $[x]$, cel mai mare număr întreg, care este mai mic sau egal cu x.

Definiție. Fiind dat numărul real x, numim partea fracționară a lui x și o notăm cu $\{x\}$, diferența dintre numărul x și partea lui întreagă ($x - \{x\}$).

Exemple. $[1{,}7] = 1, [-2{,}3] = -3;\ \{5{,}2\} = 0{,}2, \{-3{,}1\} = 0{,}9$.

Aplicații

1. Să se calculeze: $\left[\sqrt{n(n+1)}\right]$ și $\left\{\sqrt{n(n+1)}\right\}$.

Soluție. Se arată că:

$$n \le \sqrt{n(n+1)} < n+1 \Rightarrow \left[\sqrt{n(n+1)}\right] = n.$$

$$\left\{\sqrt{n(n+1)}\right\} = \sqrt{n(n+1)} - \left[\sqrt{n(n+1)}\right] = \sqrt{n(n+1)} - n.$$

2. Fie $x, y \in \mathbf{R}$. Să se demonstreze că:

$$\{x\} = \{y\} \Leftrightarrow x - y \in \mathbf{Z}.$$

Soluție: $x = [x] + \{x\}, y = [y] + \{y\} \Rightarrow x - y =$
$= [x] - [y] + \{x\} - \{y\}$. Evident: $\{x\} = \{y\} \Leftrightarrow x - y \in \boldsymbol{Z}$.

1.1.8 Operații cu intervale de numere reale

Fiind date numerele $a, b \in \mathbf{R}, a < b$, definim următoarele submulțimi ale lui **R** pe care le numim intervale:

1) $[a, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x \leq b\}$ - interval închis în *a* și *b*
2) $(a, b) = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x < b\}$ - interval deschis în *a* și *b*
3) $[a, b) = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x < b\}$ - interval închis în *a,* deschis în *b*
4) $(a, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x \leq b\}$ - interval deschis în *a,* închis în *b*
5) $[a, \infty) = \{x \in \mathbf{R} \mid x \geq a\}$ - interval închis la stânga în *a* și nemărginit la dreapta
6) $(a, \infty) = \{x \in \mathbf{R} \mid x > a\}$ - interval deschis la stânga în *a* și nemărginit la dreapta
8) $(-\infty, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid x \leq b\}$ - interval nemărginit la stânga și închis la dreapta în *b*
9) $(-\infty, b) = \{x \in \mathbf{R} \mid x < b\}$ - interval nemărginit la stânga și deschis la dreapta în *b*.

Operațiile cu intervale se definesc la fel ca operațiile cu mulțimi.

Distanța euclidiană dintre numerele reale a și b se definește ca fiind numărul $d(a, b) = |a - b|$.

Aplicații

1. Scrieți sub formă de intervale următoarele mulțimi:
a) $\{x \in \mathbf{R} \mid x \leq 3\}$ b) $\{x \in \mathbf{R} \mid 1 < x < 5\}$.

Soluție. a) $\{x \in \mathbf{R} \mid x \leq 3\} = (-\infty, 3]$.
b) $\{x \in \mathbf{R} \mid 1 < x < 5\} = (1, 5)$.

2. Să se determine mulțimea:

$$\{x \in \mathbf{R} \mid d(x, 3) < 5\}.$$

Soluție. $d(x,3)<5 \Leftrightarrow |x-3|<5 \Leftrightarrow -5<x-3<5 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow -2<x<8$. Atunci: $\{x \in \mathbf{R} \mid d(x,3)<5\} = (-2,8)$.

1.1.9 Inegalități

Pentru a demonstra inegalități, ne bazăm pe proprietățile relației de ordine pe mulțimea **R**. Se folosesc transformările echivalente și se obține o sumă de pătrate mai mare sau egală cu zero.

a) Inegalități ce pot fi folosite în cadrul demonstrării altor inegalități.

1) Dacă $a,b \in \mathbf{R}$, atunci avem: $a^2+b^2 \geq 2ab$.
Soluție. $a^2+b^2 \geq 2ab \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$.

2) Dacă $a,b \in \mathbf{R}_+$, atunci avem: $a+b \geq 2\sqrt{ab}$.
Soluție. $a+b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \geq 0$.

3) Dacă $a,b \in \mathbf{R}_+$, atunci avem: $\frac{ab}{a+b} \leq \frac{a+b}{4}$.
Soluție. $\frac{ab}{a+b} \leq \frac{a+b}{4} \Leftrightarrow (a+b)^2 \geq 4ab \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$.

4) Dacă $a,b \in \mathbf{R}_+$, atunci avem: $\frac{4}{a+b} \leq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}$.
Soluție. $\frac{4}{a+b} \leq \frac{1}{a}+\frac{1}{b} \Leftrightarrow (a+b)^2 \geq 4ab \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$.

5) Dacă $a,b \in \mathbf{R}_+$, atunci avem: $\frac{a^2+b^2}{a+b} \geq \frac{a+b}{2}$.
Soluție. $\frac{a^2+b^2}{a+b} \geq \frac{a+b}{2} \Leftrightarrow 2\left(a^2+b^2\right) \geq \left(a+b\right)^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$.

6) Dacă $a,b \in \mathbf{R}_+$, atunci avem: $\frac{a+b}{a^2+b^2} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$.
Soluție. $\frac{a+b}{a^2+b^2} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \Leftrightarrow \frac{a+b}{a^2+b^2} \leq \frac{a+b}{2ab} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0.$

7) Dacă $a, b \in \mathbf{R}_+$, atunci avem: $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2.$

Soluție. $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0.$

8) Dacă $a, b, c \in \mathbf{R}$, atunci avem: $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca.$

Soluție. $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2bc + 2ca \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0.$

9) Dacă $a, b, c \in \mathbf{R}$, atunci avem: $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}.$

Soluție. Se folosește identitatea **8)** de la **1.1.3 b)** :

$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \geq 0 \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc.$
Se înlocuiește a^3 cu a, b^3 cu b și c^3 cu c și se obține inegalitatea dorită.

10. Dacă $a, b, x, y \in \mathbf{R}$, atunci avem:

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2.$$

(Inegalitatea lui Cauchy-Buniakovski)

Soluție. După efectuarea calculelor se obține $(ay - bx)^2 \geq$
$\geq 0.$

11. Dacă $a, b, x, y \in \mathbf{R}$, atunci avem:

$$\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{x^2 + y^2} \geq \sqrt{(a+x)^2 + (b+y)^2}.$$

(Inegalitatea lui Minkovski)

Soluție. După ridicarea la pătrat se obține inegalitatea:

$$\sqrt{(a^2 + b^2)(x^2 + y^2)} \geq ax + by.$$

a) Dacă $ax + by \leq 0$, inegalitatea este evident adevărată.
b) Dacă $ax + by > 0$, ridicând la pătrat ambii membri ai inegalității obținem: $(ay - bx)^2 \geq 0.$

Aplicații

1. Să se arate că oricare ar fi $a, b, c \in \mathbf{R}_+^*$ avem:

$$\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \leq \frac{a+b+c}{2}.$$

Soluție. Se aplică inegalitatea **3)** și obținem:

$\frac{ab}{a+b} \leq \frac{a+b}{4}$, $\frac{bc}{b+c} \leq \frac{b+c}{4}$, $\frac{ca}{c+a} \leq \frac{c+a}{4}$. Se adună membru cu membru cele trei inegalități.

2. Să se arate că oricare ar fi $a, b, c \in \mathbf{R}_+^*$ avem:

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq abc(a+b+c).$$

Soluție. Se aplică inegalitatea **8)** pentru numerele reale ab, bc, ca și se obține: $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq ab^2c + abc^2 + a^2bc = abc(a+b+c)$.

3. Să se arate că dacă $a, b > 0, a + b = 1$, atunci sunt adevărate următoarele inegalități:

a) $ab \leq \frac{1}{4}$ b) $2(a^3 + b^3) \geq a^2 + b^2$.

Soluție. a) $1 = a + b \geq 2\sqrt{ab} \Rightarrow ab \leq \frac{1}{4}$.

b) $2(a^3 + b^3) \geq a^2 + b^2 \Leftrightarrow 2(a+b)^3 - 6ab(a+b) \geq$

$\geq (a+b)^2 - 2ab \Leftrightarrow 2 - 6ab \geq 1 - 2ab \Leftrightarrow ab \leq \frac{1}{4}$.

4. Să se arate că dacă $a, b, c \in \mathbf{R}, a + b + c = 0$, atunci sunt adevărate următoarele inegalități:

a) $a^2 \geq 4bc$ b) $ab + bc + ca \leq 0$.

Soluție. a) $a^2 \geq 4bc \Leftrightarrow (-b-c)^2 \geq 4bc \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b^2 + c^2 + 2bc \geq 4bc \Leftrightarrow (b-c)^2 \geq 0$.

b) $ab + bc + ca \leq 0 \Leftrightarrow ab + bc + ca \leq (a+b+c)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 2ab + 2bc + 2ca \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2 \geq 0$.

1.2 Elemente de logică matematică

1.2.1 Propoziție, predicat, cuantificatori

1) Numim **propoziție** un enunț care este fie adevărat fie fals. Notăm propozițiile cu: $p, q, r, \cdots$.

Dacă o propoziție este adevărată spunem că are valoarea de adevăr 1 și notăm $v(p) = 1$, iar dacă propoziția este falsă are valoarea de adevăr 0 și notăm $v(p) = 0$.

Exemple.

a) „2+3=5" este o propoziție adevărată.

b) „10 este număr impar" este o propoziție falsă.

2) Fiind dată propoziția p, numim **negația propoziției** p, propoziția notată $\neg p$ și care este adevărată atunci când p este falsă și falsă atunci când p este adevărată.

Exemple.

a) Fiind dată propoziția p: „11 este număr prim", avem că p este adevărată și atunci propoziția $\neg p$ este falsă.

b) Fiind dată propoziția p: „3 divide pe 7", avem că p este falsă și atunci propoziția $\neg p$ este adevărată.

3) Fiind date propozițiile p și q, numim **conjuncția** propozițiilor p și q, propoziția notată $p \wedge q$, care este adevărată atunci când p și q sunt adevărate și falsă când cel puțin una din propoziții este falsă.

Exemple.

a) Fiind date propozițiile: p: „22 este număr par" și q: „8>5" avem că p și q sunt adevărate și atunci propoziția $p \wedge q$ este adevărată.

b) Fiind date propozițiile: p: „$1 + 2 + 3 > 2 + 3 + 4$" și q: „Medianele unui triunghi sunt concurente", avem că p este falsă și q este adevărată și atunci propoziția $p \wedge q$ este falsă.

4) Fiind date propozițiile p și q, numim **disjuncția** propozițiilor p și q, propoziția notată $p \vee q$, care este adevărată

atunci când cel puțin una din propozițiile p și q este adevărată și falsă când propozițiile p și q sunt false.

Exemple.

a) Fiind date propozițiile: p: „$1 = 5$” și q: „$12 > 3$” avem că p este falsă și q este adevărată și atunci propoziția $p \vee q$ este adevărată.

b) Fiind date propozițiile: p: „$1 + 2 = 5$” și q: „12 divide pe 50” avem că p și q sunt false și atunci propoziția $p \vee q$ este falsă.

5) Fiind date propozițiile p și q, numim **implicația** propozițiilor p și q, propoziția notată $p \to q$ (p implică q), care este falsă atunci și numai atunci când p este adevărată și q este falsă.

Exemplu. Fiind date propozițiile: p: „$5 = 5$” și q: „$15 < 5$” avem că p este adevărată și q este falsă și atunci propoziția $p \to q$ este falsă.

6) Fiind date propozițiile p și q, numim **echivalența** propozițiilor p și q, propoziția notată $p \leftrightarrow q$ (p echivalent cu q), care este adevărată atunci și numai atunci când ambele propoziții sunt adevărate sau ambele propoziții sunt false.

Exemplu. Fiind date propozițiile: p: „$3 > 5$” și q: „6 este număr prim” avem că p și q sunt false și atunci propoziția $p \leftrightarrow q$ este adevărată.

7) Numim **predicat** un enunț care depinde de una sau mai multe variabile și care pentru orice grupă de valori admisibile date variabilelor se transformă în propoziție adevărată sau falsă.

Predicatele care depind de o variabilă se numesc **predicate unare**, cele care depind de două variabile se numesc **predicate binare**, etc.

Exemplu. „$P(x): 3x - 6 = 0$", unde $x \in \boldsymbol{N}$ este un predicat unar. Pentru $x = 2$ se transformă în propoziție adevărată, iar pentru $x \neq 2$ se transformă în propoziție falsă.

8) Fiind dat un predicat unar $P(x)$, unde $x \in A$, atunci propoziția „există cel puțin o valoare $x \in A$ pentru care $P(x)$ este

o propoziție adevărată" se numește **propoziție existențială** asociată predicatului $P(x)$ și se notează $(\exists)xP(x)$.

Exemplu. Propoziția: $(\exists)x(x^2-3x+2=0)$, unde $x \in \mathbf{N}$ este adevărată, deoarece $x=1$ verifică ecuația $x^2-3x+2=0$.

9) Fiind dat un predicat unar $P(x)$, unde $x \in A$, atunci propoziția „oricare ar fi $x \in A$, $P(x)$ este o propoziție adevărată" se numește **propoziție universală** asociată predicatului $P(x)$ și se notează $(\forall)xP(x)$.

Exemplu. Propoziția: $(\forall)x(x^2-x+2=0)$, unde $x \in \mathbf{Z}$ este falsă, deoarece $x=1 \in \mathbf{Z}$ nu verifică ecuația $x^2-x+2=0$.

1.2.2 Mulțimi. Corelarea elementelor de logică matematică cu operațiile și relațiile cu mulțimi

a) Noțiunea de mulțime

1. Noțiunea de **mulțime** nu se definește, fiind o noțiune primară.

Exemplu. $A=\{1,2,3\}$ este o mulțime notată cu A.

2. Dacă A este o mulțime și x un element al mulțimii A, atunci enunțul „$x \in A$" este un predicat unar.

Dacă a este un element dat al mulțimii A, atunci „$a \in A$" este o propoziție și avem: $\neg(a \in A) \equiv a \notin A$.

3. Fiind date două mulțimi A și B și dacă orice element al lui A este și element al lui B, spunem că A este inclusă în B și notăm: $A \subset B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$.

Exemplu. Dacă $A=\{1\}$ și $B=\{1,3\}$, atunci $A \subset B$.

4. Fiind date două mulțimi A și B, spunem că ele sunt egale și notăm $A=B \Leftrightarrow (A \subset B \wedge B \subset A)$, dacă au aceleași elemente.

Exemplu. Dacă $A=\{1,2,3\}$ și $B=\{1,2,3\}$, atunci $A=B$.

5. Mulțimea care nu are nici un element se numește **mulțimea vidă** și se notează $\varnothing$.

b) Operații cu mulțimi

1. Intersecția a două mulțimi A și B reprezintă mulțimea elementelor care aparțin atât lui A cât și lui B. Se notează $A \cap B$ și este definită de predicatul $x \in A \wedge x \in B$.

Exemplu. Dacă $A = \{1, 2, 3\}$ și $B = \{1,2, 3, 4, 5\}$, atunci $A \cap B = \{1, 2, 3\}$.

2. Reuniunea a două mulțimi A și B reprezintă mulțimea elementelor care aparțin cel puțin uneia dintre mulțimile A sau B. Se notează $A \cup B$ și este definită de predicatul $x \in A \vee x \in B$.

Exemplu. Dacă $A = \{1, 3\}$ și $B = \{1,2, 3, 4, 5, 6\}$, atunci $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

3. Diferența a două mulțimi A și B reprezintă mulțimea elementelor care aparțin mulțimii A și nu aparțin mulțimii B. Se notează $A - B$ și este definită de predicatul $x \in A \wedge x \notin B$.

Exemplu. Dacă $A = \{1, 3, 5, 9, 10\}$ și $B = \{1,2, 3, 4, 5\}$, atunci $A - B = \{9, 10\}$.

4. Fiind dată mulțimea E și submulțimea $A \subset E$, numim **complementara** mulțimii A în raport cu E mulțimea elementelor care aparțin mulțimii E și nu aparțin mulțimii A. Se notează se notează $C_E A = E - A$ și este definită de predicatul $x \in E \wedge x \notin A$.

Exemplu. Dacă $E = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ și $B = \{1, 3, 5\}$, atunci $C_E A = \{7, 9, 11\}$.

5. Fiind date mulțimile A și B, numim **produs cartezian** al mulțimilor A și B și notăm cu $A \times B$ mulțimea tuturor perechilor ordonate (a, b) unde $a \in A$ și $b \in B$.

Exemplu. Dacă $A = \{0, 1\}$ și $B = \{2, 3\}$, atunci:

$$A \times B = \{(0, 2), (0, 3), (1, 2), (1, 3)\}.$$

c) Proprietăți ale mulțimilor

1) $A \cap B = B \cap A$ - comutativitatea intersecției
2) $A \cup B = B \cup A$ - comutativitatea reuniunii
3) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ - asociativitatea intersecției

4) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ - asociativitatea reuniunii
5) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ – distributivitatea reuniunii față de intersecție
6) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ - distributivitatea intersecției față de reuniune
7) $C_E(A \cup B) = (C_E A) \cap (C_E B)$
$C_E(A \cap B) = (C_E A) \cup (C_E B)$ - legile lui De Morgan.
8. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

Aplicații

1. Demonstrați egalitățile:
a) $A \cup A = A$ b) $(A - B) - C = A - (B \cup C)$
Soluție. a) $x \in A \cup A \Leftrightarrow x \in A$ și $x \in A \Leftrightarrow x \in A$.
b) $x \in (A - B) - C \Leftrightarrow x \in (A - B)$ și $x \notin C \Leftrightarrow x \in A$ și $x \notin B$ și $x \notin C \Leftrightarrow x \in A$ și $x \notin (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A - (B \cup C)$.

2. Determinați $x \in \mathbf{N}$, astfel încât să aibă loc egalitatea:
$$\{x, 2, 3, 7\} = \{1, 2, x + 2, 7\}.$$
Soluție. Trebuie ca $x = 1$ și $x + 2 = 3$, adică $x = 1$.

1.3 Condiții necesare, condiții suficiente

În matematică, **teorema** reprezintă o propoziție adevărată care stabilește că un anume obiect matematic are o anume proprietate.

Orice teoremă trebuie demonstrată, folosind fie axiomele cunoscute, fie alte teoreme cunoscute.

Exemplu. În orice triunghi medianele sunt concurente.

Forma generală a unei **teoreme** este: $P(x_1, x_2, \cdots, x_n) \Rightarrow$ $\Rightarrow Q(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, unde $P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $Q(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ sunt predicate *n*-are. Predicatul $P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ se numește ipoteza teoremei, iar predicatul $Q(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ se numește concluzia teoremei. Spunem că $P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ este o **condiție suficientă**

pentru $Q(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, iar $Q(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ este o **condiție necesară** pentru $P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

Exemplu. Dacă $x = y$, atunci $x^2 = y^2$, unde $x, y \in \mathbf{R}$.
$P(x, y)$: „$x = y$" este ipoteza teoremei, iar $Q(x, y)$: „$x^2 = y^2$" este concluzia teoremei.

Fiind dată **teorema**: $P(x_1, x_2, \cdots, x_n) \Rightarrow Q(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, dacă propoziția $Q(x_1, x_2, \cdots, x_n) \Rightarrow P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ este adevărată, atunci ea se numește **teoremă reciprocă,** iar $P(x_1, x_2, \cdots, x_n) \Rightarrow Q(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ se numește **teoremă directă**. În acest caz scriem $P(x_1, x_2, \cdots, x_n) \Leftrightarrow Q(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ și citim $P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ este echivalent cu $Q(x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

Exemplu. $x = y \Leftrightarrow x^5 = y^5$, unde $x, y \in \mathbf{R}$.

1.4 Tipuri de raționamente logice

a) Metoda reducerii la absurd

Fiind dată propoziția $p \to q$, numim **contrara** acestei propoziții, propoziția $\neg p \to \neg q$.

Deoarece formula $p \to q \leftrightarrow \neg q \to \neg p$ este o tautologie (este adevărată indiferent de valorile de adevăr ale lui p și q), rezultă că teorema directă $p \to q$ este echivalentă cu teorema contrară a reciprocei $\neg q \to \neg p$.

Metoda reducerii la absurd constă în înlocuirea demonstrării **teoremei directe** cu demonstrarea **contrarei reciprocei**.

b) Metoda inducției matematice

Inducția reprezintă metoda de raționament prin care din propoziții particulare se obține o propoziție generală.

Exemplu. Din propozițiile particulare adevărate: $2 = 1 \cdot 2$, $2 + 4 = 2 \cdot 3, 2 + 4 + 6 = 3 \cdot 4, 2 + 4 + 6 + 8 = 4 \cdot 5$ formulăm propoziția generală: „$2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n + 1)$", care se poate demonstra că este adevărată.

Dacă propoziția generală are o infinitate de cazuri particulare, atunci demonstrația se face prin **metoda inducției matematice,** care are la bază următorul principiu, numit **principiul inducției matematice**:

Fie $P(n)$, unde $n \in \mathbf{N}$ o propoziție. Dacă:

a) $P(0)$ este adevărată și

b) presupunând că $P(n)$ este adevărată pentru $n = k \in \mathbf{N}$, rezultă că este adevărată și pentru $n = k + 1$, atunci $P(n)$ este adevărată pentru orice număr $n \in \mathbf{N}$.

Metoda inducției matematice.

Pentru a demonstra că o propoziție $P(n)$ este adevărată pentru orice $n \in \mathbf{N}, n \geq n_0$ se parcurg două etape:

a) etapa verificării: se verifică, că $P(n_0)$ este adevărată;

b) etapa demonstrației: se arată că dacă $P(n),\ n \in \mathbf{N}, n \geq n_0$ este adevărată, atunci și $P(n+1)$ este adevărată.

Aplicații

1. Să se demonstreze prin inducție matematică egalitatea:

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}, n \in \mathbf{N}^*.$$

Soluție. Notăm:

$$P(n): 1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}.$$

a) $P(1): 1^2 = \frac{1(4 \cdot 1^2 - 1)}{3}$ sau $P(1): 1 = 1$ adevărat.

b) Vom demonstra că $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

$$P(n+1): 1^2 + 3^2 + \cdots + (2n+1)^2 = \frac{(n+1)(4n^2+8n+3)}{3}.$$

Adunăm la ambii membri ai lui $P(n)$ expresia $(2n+1)^2$:

$$1^2 + 3^2 + \cdots + (2n+1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3} + (2n+1)^2.$$

Ne rămâne să demonstrăm că:

$$\frac{n(4n^2-1)}{3}+(2n+1)^2=\frac{(n+1)(4n^2+8n+3)}{3},$$
Verificare se face prin calcul direct.

2. Să se verifice prin inducție matematică inegalitatea:
$$2^n \geq n^2-1, n \geq 2.$$
Soluție. Notăm $P(n)$: $2^n \geq n^2-1$.
a) $P(2)$: $2^2 \geq 2^2-1$, care este evident adevărată.
b) Vom demonstra că $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.
$P(n+1)$: $2^{n+1} \geq (n+1)^2-1$ sau $P(n+1)$: $2^{n+1} \geq n^2+2n$.
Înmulțim ambii membri ai lui $P(n)$ cu 2 și obținem:
$$2 \cdot 2^n \geq 2(n^2-1) \Leftrightarrow 2^{n+1} \geq 2n^2-2.$$
Ne rămâne să demonstrăm că:
$$2n^2-2 \geq n^2+2n\ (\forall)n \geq 2 \Leftrightarrow n^2 \geq 2n+2\ (\forall)n \geq 2$$
care este evident.

3. Să se arate că pentru orice $n \in \mathbf{N}-\{0\}$ avem:
$5^{2n+1} \cdot 2^{n+2}+3^{n+2} \cdot 2^{2n+1}$ se divide cu 19.
Soluție. Notăm $d_n = 5^{2n+1} \cdot 2^{n+2}+3^{n+2} \cdot 2^{2n+1}$ și
$P(n)$: d_n se divide cu 19.
a) $P(1)$: d_1 se divide cu 19 sau $P(1)$: 1216 se divide cu 19, ceea ce este adevărat.
b) Vom demonstra că $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.
$d_{n+1} = 5^{2n+3} \cdot 2^{n+3}+3^{n+3} \cdot 2^{2n+3} = 5^2 \cdot 5^{2n+1} \cdot 2 \cdot 2^{n+2}+$
$+3^{n+3} \cdot 2^{2n+3} = 50 \cdot 5^{2n+1} \cdot 2^{n+2}+3^{n+3} \cdot 2^{2n+3} =$
$= 50(5^{2n+1} \cdot 2^{n+2}+3^{n+2} \cdot 2^{2n+1}-3^{n+2} \cdot 2^{2n+1})+$
$+3^{n+3} \cdot 2^{2n+3} = 50(d_n-3^{n+2} \cdot 2^{2n+1})+3^{n+3} \cdot 2^{2n+3} =$
$= 50d_n-3^{n+2} \cdot 2^{2n+1}(50-3 \cdot 2^2) = 50d_n-3^{n+2} \cdot 2^{2n+1} \cdot 38$
care se divide cu 19, deoarece d_n și 38 se divid cu 19.

c) Probleme de numărare

Fiind dată mulțimea A finită, numim **cardinalul** mulțimii A și notăm cu $\overline{\overline{A}}$ numărul de elemente al mulțimii A.

Exemple.

a) Dacă $A = \{1, 2, 3, 4\}$, atunci $\bar{\bar{A}} = 4$.

b) Dacă $A = \{6, 12, 20, 30, \cdots, 72\}$, atunci $\bar{\bar{A}} = 7$.

Proprietăți. Dacă A și B sunt mulțimi finite, atunci:

a) $\overline{\overline{A \times B}} = \bar{\bar{A}} \cdot \bar{\bar{B}}$;

b) $\overline{\overline{A \cup B}} = \bar{\bar{A}} + \bar{\bar{B}} - \overline{\overline{A \cap B}}$;

c) $\overline{\overline{A \cup B \cup C}} = \bar{\bar{A}} + \bar{\bar{B}} + \bar{\bar{C}} - \overline{\overline{A \cap B}} - \overline{\overline{A \cap C}} - \overline{\overline{B \cap C}} + \overline{\overline{A \cap B \cap C}}$;

d) $\overline{\overline{A - B}} = \bar{\bar{A}} - \overline{\overline{A \cap B}}$;

e) $\bar{\bar{A}} = n \Rightarrow P(A) = 2^n$.

Aplicații

1. Fie mulțimea: $A = \{1, 2, \cdots, 100\}$. Să se determine câte numere din mulțime sunt divizibile cu 3.

Soluție. Numerele divizibile cu 3 sunt 3, 6, ⋯, 99 și sunt în total $\left[\frac{100}{3}\right] = 33$.

2. Într-o sală sunt 5 băieți și 6 fete. Fiecare băiat dansează cu fiecare fată. Stabiliți câte perechi băiat-fată au dansat.

Soluție. Notăm cu A mulțimea băieților și cu B mulțimea fetelor. Atunci $\overline{\overline{A \times B}} = \bar{\bar{A}} \cdot \bar{\bar{B}} = 5 \cdot 6 = 30$.

2. Funcții definite pe mulțimea numerelor naturale(șir)

2.1 Șiruri

Definiție. Fiind dată o mulțime oarecare A, numim **șir** de elemente din mulțimea A o funcție $f: \mathbf{N}^* \to A$**.**

Dacă $A \subset \mathbf{R}$, atunci șirul se numește șir de numere reale.

Notăm $f(n) = a_n$, iar șirul de numere reale cu $(a_n)_{n\geq 1}$.

Definiție. Șirul de numere reale $(a_n)_{n\geq 1}$ este **strict crescător** dacă $a_n < a_{n+1,}(\forall)n \in \mathbf{N}^*$.

Exemplu. Fie $(a_n)_{n\geq 1}, a_n = 3n + 7$. Atunci:

$a_{n+1} = 3(n + 1) + 7 = 3n + 10 > 3n + 7 = a_n$.

Definiție. Șirul de numere reale $(a_n)_{n\geq 1}$ este **strict descrescător** dacă $a_n > a_{n+1,}(\forall)n \in \mathbf{N}^*$.

Exemplu. Fie $(a_n)_{n\geq 1}, a_n = -n + 1$. Atunci:

$a_{n+1} = -(n + 1) + 1 = -n < -n + 1 = a_n$.

Definiție. Șirul de numere reale $(a_n)_{n\geq 1}$ este **monoton crescător** dacă $a_n \leq a_{n+1,}(\forall)n \in \mathbf{N}^*$.

Definiție. Șirul de numere reale $(a_n)_{n\geq 1}$ este **monoton descrescător** dacă $a_n \geq a_{n+1,}(\forall)n \in \mathbf{N}^*$.

Definiție. Șirul de numere reale $(a_n)_{n\geq 1}$ este **mărginit** dacă există un număr pozitiv M, astfel încât $|a_n| \leq M, (\forall)n \in \mathbf{N}^*$.

Exemplu. Fie $(a_n)_{n\geq 1}, a_n = \frac{n}{n+1}$. Atunci $a_n = \frac{n}{n+1} < 1$.

2.2 Progresii aritmetice

2.2.1 Noțiunea de progresie aritmetică

Definiție. Un șir $(a_n)_{n\geq 1}$ de numere reale se numește **progresie aritmetică**, dacă există un număr real r, numit rație, astfel încât fiecare termen, începând cu al doilea se obține din precedentul adunând r ($a_k = a_{k-1} + r, (\forall)k,\ k \geq 2$).

Folosind formula din definiție rezultă relația:

$$a_k - a_{k-1} = r, (\forall) k, k \geq 2.$$

O progresie aritmetică este bine determinată de primul termen al său a_1 și rația r.

Exemple. a) Șirul $(a_n)_{n\geq 1}$, dat de $a_n = n$ este progresie aritmetică deoarece $a_k - a_{k-1} = 1, (\forall) k, k \geq 2$.

b) Șirul $(a_n)_{n\geq 1}$, dat de $a_n = n^2$ nu este progresie aritmetică deoarece $a_k - a_{k-1} = 2k - 1$, care nu este constantă.

2.2.2 Formula termenului general al progresiei aritmetice

Teoremă. Termenul general al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ este dat de formula:

$$a_n = a_1 + (n-1)r.$$

Exemplu. a) Pentru progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}, a_1 = 2,$ $r = 3$, avem: $a_n = a_1 + (n-1)r = 2 + 3(n-1) = 3n - 1.$

Aplicații

1. Să se determine progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ știind că $a_4 = 7$ și $a_8 = 15$.

Soluție. $a_4 = a_1 + 3r = 7$ și $a_8 = a_1 + 7r = 15$. Rezolvând sistemul obținem $a_1 = 1$ și $r = 2$.

2. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică. Dacă $a_m = n$ și $a_n = m, m \neq n$ să se calculeze $a_p, p \in \mathbf{N}^*$.

Soluție. Avem: $a_m = a_1 + (m-1)r = n$ și $a_n = a_1 + +(n-1)r = m$. Rezolvând sistemul format obținem $r = -1$ și $a_1 = m + n - 1$. Atunci $a_p = a_1 + (p-1)r = m + n - 1 - p + +1 = m + n - p$.

3. Se consideră șirul: 1, 5, 9, ···. Determinați rangul termenului 401.

Soluție. Se observă că șirul este o progresie aritmetică cu primul termen $a_1 = 1$ și rația $r = 4$. Notăm cu k rangul termenului 401 și avem: $401 = 1 + (k-1) \cdot 4 \Rightarrow k = 101.$

2.2.3 Suma primilor n termeni ai unei progresii aritmetice

Teoremă. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică și $S_n = a_1 + +a_2 + \cdots + a_n$ suma primilor n termeni ai săi. Atunci este adevărată formula:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}, n \geq 1.$$

Exemple. a) Fiind dată progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}, a_n = = 3n - 1$, avem $a_1 = 2, a_{10} = 29$, iar suma primilor 10 termeni ai săi este egală cu:

$$S_{10} = \frac{(2 + 29)10}{2} = 155.$$

b) Se consideră șirul $1, 3, 5, 7, \cdots$. Acesta este progresie aritmetică cu primul termen $a_1 =1$ și rația $r = 2$. Atunci termenul 1000 este $a_{1000} = 1 + 999 \cdot 2 = 1999$. Suma primilor 1000 de termeni ai șirului este egală cu:

$$S_{1000} = \frac{(1 + 1\,999) \cdot 1\,000}{2} = 1\,000\,000.$$

Aplicații

1. Să se determine progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ știind că $a_1 + a_3 = 8$ și $S_4 = 22$.

Soluție. $a_1 + a_3 = 8 \Rightarrow a_1 + a_1 + 2r = 8 \Rightarrow a_1 + r = 4$.

$S_4 = 22 \Rightarrow \frac{(a_1 + a_4)4}{2} = 22 \Rightarrow 2a_1 + 3r = 11.$

Rezolvând sistemul format din cele două ecuații obținem: $a_1 = 1$ și $r = 3$.

2. Să se rezolve ecuația:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + x = 100.$$

Soluție. Notăm cu *n* numărul termenilor progresiei aritmetice. Rația progresiei este $r = 2$, primul termen $a_1 = 1$ și suma $S = 100$. Atunci:

$$S = \frac{[a_1 + a_n]n}{2} = \frac{[2a_1 + (n-1)r]}{2} = 100 \Rightarrow n = 100.$$

3. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică și S_k suma primilor k termeni ai săi. Să se demonstreze că dacă $S_m = m$ și $S_n = n$, $m \neq n$, atunci $S_p = p$ $(\forall)p \in \mathbf{N}^*$.

Soluție.

$$S_m = m \Rightarrow \frac{[a_1 + a_m]m}{2} = m \Rightarrow 2a_1 + (m-1)r = 2.$$

$$S_n = n \Rightarrow \frac{[a_1 + a_n]n}{2} = n \Rightarrow 2a_1 + (n-1)r = 2.$$

Scăzând membru cu membru cele două relații obținem: $r(m-n) = 0 \Rightarrow r = 0$ $(m \neq n)$. Atunci $a_1 = 1$.

$$S_p = \frac{[a_1 + a_p]p}{2} = \frac{(1+1)p}{2} = p.$$

2.2.4 Alte proprietăți ale progresiilor aritmetice

1. Fiind dată progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$, are loc relația:

$$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2} \ (\forall)k, k \geq 2.$$

2. Dacă un șir de numere reale $(a_n)_{n\geq 1}$ are proprietatea:

$$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2} \ (\forall)k, k \geq 2,$$

atunci acest șir este o progresie aritmetică.

3. Fiind date numerele $a_1, a_2, \cdots, a_n$ în progresie aritmetică, are loc relația:

$$a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n \ (\forall)k, k \geq 2.$$

Aplicații

1. Dacă numerele $a^2 - bc, b^2 - ac, c^2 - ab$ sunt în progresie aritmetică, atunci și numerele a, b, c sunt în progresie aritmetică

sau $a+b+c=0$.

Soluție. Deoarece numerele a^2-bc, b^2-ac, c^2-ab sunt în progresie aritmetică, atunci are loc relația:

$b^2-ac=\frac{a^2-bc+c^2-ab}{2} \Rightarrow a^2-bc+c^2-ab-2b^2+$
$+2ac=0 \Rightarrow (a+c)^2-b^2-b(a+b+c)=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (a+b+c)(a-b+c)-b(a+b+c)=0 \Rightarrow (a+b+c)\cdot$
$\cdot (a-2b+c)=0 \Rightarrow a+b+c=0$ sau $b=\frac{a+c}{2}$.

2. Să se arate că dacă $a>0, b>0, c>0$ sunt în progresie aritmetică, atunci și numerele:

$$\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}, \frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

sunt în progresie aritmetică.

Soluție. Fie r rația progresiei. Notăm:

$A=\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}=\frac{\sqrt{c}-\sqrt{b}}{c-b}=\frac{\sqrt{c}-\sqrt{b}}{r}$. Analog obținem:

$B=\frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{c}-\sqrt{a}}{2r}, \qquad C=\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{r}.$

Evident $2B=A+C$.

2.3 Progresii geometrice

2.3.1 Noțiunea de progresie geometrică

Definiție. Un șir $(b_n)_{n\geq 1}$ de numere reale se numește **progresie geometrică**, dacă există un număr real q, numit rație, astfel încât fiecare termen, începând cu al doilea se obține din precedentul înmulțit cu q ($b_k=b_{k-1}\cdot q, (\forall)k,\ k\geq 2$).

Folosind formula din definiție rezultă relația:

$$\frac{b_k}{b_{k-1}}=q, (\forall)k, k\geq 2.$$

O progresie geometrică este bine determinată de primul termen al său a_1 și rația q.

Exemplu. a) Șirul dat de 2, 6, 18, 54, 162 este progresie geometrică deoarece $6 = 2 \cdot 3, 18 = 6 \cdot 3,\ 54 = 18 \cdot 3,\ 162 = 54 \cdot 3$. Rația progresiei este 3.

2.3.2 Formula termenului general al progresiei geometrice

Teoremă. Termenul general al progresiei aritmetice $(b_n)_{n\geq 1}$ este dat de formula:

$$b_n = b_1 q^{n-1} (\forall) n, n \geq 2.$$

Exemplu. a) Pentru progresia geometrică $(b_n)_{n\geq 1}, b_1 = 2$, $q = 2$, avem: $b_n = b_1 \cdot q^{n-1} = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$.

Aplicații

1. Să se determine progresia geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$ știind că $b_2 = 6$ și $b_4 = 54$.

Soluție. $b_2 = b_1 q = 6$ și $b_4 = b_1 q^3 = 54$. Împărțind a doua ecuație la prima obținem $q^2 = 9 \Rightarrow q = \pm 3$ și apoi $b_1 = \pm 2$.

2. Fie $(b_n)_{n\geq 1}$ o progresie geometrică. Dacă $b_m = n$ și $b_n = m, m \neq n$ să se calculeze $b_p, p \in \mathbf{N}^*$.

Soluție. Avem: $b_m = b_1 q^{m-1} = n$ și $b_n = b_1 q^{n-1} = m$. Împărțind membru cu membru cele două relații obținem:

$$q^{m-n} = \frac{n}{m} \Rightarrow q = \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{m-n}} \text{ și } b_1 = n \cdot \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{m-1}{m-n}}.$$

3. Se consideră șirul: 1, 3, 9, 27, 81,⋯. Determinați rangul termenului 6561.

Soluție. Se observă că șirul este o progresie geometrică cu primul termen $a_1 = 1$ și rația $q = 3$. Notăm cu k rangul termenului 6561 și avem: $6561 = 1 \cdot 3^{k-1} \Rightarrow 3^{k-1} = 3^8 \Rightarrow k = 9$.

2.3.3 Suma primilor n termeni ai unei progresii geometrice

Teoremă. Fie $(b_n)_{n\geq 1}$ o progresie geometrică cu rația $q \neq 1$ și $S_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ suma primilor *n* termeni ai săi. Atunci este adevărată formula:

$$S_n = b_1 \frac{1-q^n}{1-q}, n \geq 1.$$

Exemplu. a) Fiind dată progresia geometrică $1, 2, 4, 8, \cdots$ avem $b_1 = 1,\ q = 2$, iar suma primilor 9 termeni ai săi este:

$$S_9 = 1 \cdot \frac{1-2^9}{1-2} = 511.$$

Aplicații

1. Să se determine progresia geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$ știind că $S_2 = 4$ și $S_3 = 13$.

Soluție. Avem:

$b_1 \frac{1-q^2}{1-q} = 4$ și $b_1 \frac{1-q^3}{1-q} = 13 \Rightarrow b_1(1+q) = 4$ și $b_1(1+q+q^2) = 13$.

Rezolvând sistemul format obținem: $b_1 = 1$ și $q = 3$.

2. Să se decidă dacă este progresie geometrică un șir astfel încât pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$ suma primilor *n* termeni ai săi este dată de formula $S_n = 3n + 1$.

Soluție. Pentru $n \geq 2$, avem $a_n = S_n - S_{n-1} = (3n+1) - -3(n-1) - 1 = 3$. $a_1 = S_1 = 4$. Evident șirul nu este progresie geometrică.

2.3.4 Alte proprietăți ale progresiilor geometrice

1. Fiind dată progresia geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$, are loc relația:

$$b_k = \sqrt{b_{k-1} \cdot b_{k+1}}\ \ (\forall) k, k \geq 2.$$

2. Dacă un șir de numere reale $(b_n)_{n\geq 1}$ are proprietatea:

$$b_k = \sqrt{b_{k-1} \cdot b_{k+1}} \ (\forall) k, k \geq 2$$

atunci acest șir este o progresie geometrică.

3. Fiind date numerele $b_1, b_2, \cdots, b_n$ în progresie geometrică are loc relația:

$$b_k \cdot b_{n-k+1} = b_1 \cdot b_n \ (\forall) k, k \geq 2.$$

Aplicații

1. Dacă numerele a, b, c sunt în progresie geometrică, atunci are loc egalitatea:

$$a^3(b+c)(b^2+c^2) = b^3(a+b)(a^2+b^2).$$

Soluție. Deoarece a, b, c sunt în progresie geometrică, rezultă că $b^2 = ac$. Atunci avem:

$a^3(b+c)(b^2+c^2) = a^3(b+c)(ac+c^2) = a^2 \cdot ac(b+c) \cdot$
$\cdot (a+c) = b^2(ab+ac)(a^2+ac) = b^2(ab+b^2)(a^2+b^2) =$
$= b^3(a+b)(a^2+b^2)$.

2. Să se determine $x \in \mathbf{N}$, astfel încât numerele $x+1, 4x+1, 8x+11$ să fie în progresie geometrică.

Soluție. Numerele $x+1, 4x+1, 8x+11$ sunt în progresie geometrică dacă $(4x+1)^2 = (x+1)(8x+11) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 16x^2 + 8x + 1 = 8x^2 + 8x + 11x + 11 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 8x^2 - 11x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ sau $x - = \frac{5}{8}$.

Soluția corectă este $x = 2$.

3. Funcții, lecturi grafice

3.1 Noțiunea de funcție

1) Definiția funcției

Definiție. Fiind date două mulțimi nevide A și B, prin **funcție** definită pe A cu valori în B înțelegem o lege f prin care fiecărui element $x \in A$ îi punem în corespondență un element unic y$\in B$.

Notăm $f: A \to B, f(x) = y$.

Mulțimea A se numește **domeniul de definiți**e al funcției.

Mulțimea B se numește **codomeniul** sau **mulțimea în care funcția ia valori.**

f este **legea** de corespondență între cele două mulțimi.

x se numește **argumentul** funcției.

y se numește **imaginea** lui x prin funcția f.

Exemplu. Corespondența $f : A \to B$, unde $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}, B = \{0, 1, 2, 3, 4\}, f(x) = x^2$ este funcție deoarece $f(-2) = 4, f(-1) = 1, f(0) = 0, f(1) = 1$ și $f(2) = 4$.

2) Funcții egale

Definiție. Fiind date funcțiile $f: A \to B$ și $g : C \to D$, spunem că funcțiile f și g sunt egale dacă: $A = C, B = D$ și $f(x) = g(x), (\forall)x \in A$.

Exemplu. Funcțiile $f, g : \mathbf{R} - \{1\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x - 1$ și $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ sunt egale deoarece $g(x) = \dfrac{(x-1)(x+1)}{x+1} =$ $= x - 1 = f(x)$.

3) Imaginea unei funcții

Definiție. Fiind dată funcția $f: A \to B$, numim **imaginea** funcției f, mulțimea $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$ pe care o notăm Im f.

Exemplu. Pentru funcția $f: \{-1, 0, 1\} \to \mathbf{R}, f(x) = x + 5$, avem: $f(-1) = 4, f(0) = 5, f(1) = 6$ și Im $f = \{4, 5, 6\}$.

4) Restricția și prelungirea unei funcții

Definiție. Fiind date funcțiile $f: A \to B$ și $g: C \to D$, astfel încât $A \subset C$ și $f(x) = g(x)(\forall)x \in A$, spunem că funcția f este **restricția** funcției g la A , iar funcția g este **prelungirea** funcției f la C.

Exemplu. $f: [0, 1] \to \mathbf{R}, f(x) = x + 1, g: (-2, 2) \to \mathbf{R}$, $g(x) = x + 1$.

5) Graficul unei funcții

Definiție. Fiind dată funcția $f: A \to B$, numim **graficul** funcției f , mulțimea $\{(x, y)|x \in A, y = f(x)\}$ pe care o notăm $\boldsymbol{G_f}$.

Exemplu. Pentru funcția $f: \{-2, 0, 1\} \to \mathbf{R}, f(x) = x + 3$, graficul său este: $G_f = \{(-2, 1), (0, 3), (1, 4)\}$.

3.2 Funcții numerice

Definiție. Funcția $f: A \to B$, se numește funcție numerică, dacă $A \subset \mathbf{R}$ și $B \subset \mathbf{R}$.

Exemplu. Funcția $f: (0, 1) \to (0, +\infty)$ este numerică.

Fiind dată funcția numerică $f: A \to B$ reprezentăm geometric graficul funcției f reprezentând în planul XOY toate punctele $M(x, y) \in \boldsymbol{G_f}$.

Definiție. Fiind dată funcția numerică $f: A \to B$, spunem că:
a) f este **crescătoare** pe A, dacă pentru orice $x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow$ $\Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.
b) f este **strict crescătoare** pe A, dacă pentru orice $x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
c) f este **descrescătoare** pe A, dacă pentru orice $x_1, x_2 \in A, x_1 <$ $< x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.
d) f este **strict descrescătoare** pe A, dacă pentru orice $x_1, x_2 \in A$,

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Exemplu. Funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = x + 2$ este strict crescătoare deoarece: $x_1, x_2 \in \mathbf{R}, x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - x_2 < 0$ și atunci $f(x_1) - f(x_2) = (x_1 + 2) - (x_2 + 2) = x_1 - x_2 < 0$.

Observație. a) Fiind dată funcția numerică $f : A \to B$, spunem că funcția f este **monotonă** dacă și numai dacă f este crescătoare sau descrescătoare.

b) Fiind dată funcția numerică $f : A \to B$, spunem că funcția f este **strict monotonă** dacă și numai dacă f este strict crescătoare sau strict descrescătoare.

Definiție. Fiind dată funcția numerică $f : A \to B$, spunem că ea este **mărginită** dacă există $M > 0$, astfel încât să avem: $|f(x)| \leq M, (\forall)x \in A$.

Exemplu. Funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ este mărginită, deoarece $|f(x)| = \left|\frac{2x}{x^2+1}\right| \leq 1, (\forall)x \in \mathbf{R}$.

Definiție. Fiind dată funcția numerică $f : A \to B$, spunem că ea este **nemărginită** dacă oricare ar fi $M > 0$, $(\exists)x \in A$ astfel încât să avem: $|f(x)| > M$.

Exemplu. Funcția $f : (0, +\infty) \to \mathbf{R}, f(x) = x + 3$ este nemărginită, deoarece oricare ar fi $M > 0$, $(\exists)x \in (0, +\infty)$ astfel încât să avem: $|f(x)| > M \Leftrightarrow x + 1 > M \Leftrightarrow x > M - 1$. Luăm $x = [M - 1] + 1$.

Definiție. Mulțimea $A \subset R$ se numește simetrică față de origine dacă $(\forall)x \in A$, rezultă că $-x \in A$.

Definiție. Fiind dată funcția numerică $f : A \to B$, unde A este mulțime simetrică, spunem că ea este funcție pară dacă $f(-x) = = f(x)(\forall)x \in A$.

Exemplu. Funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = x^2 + 1$ este funcție pară, deoarece $f(-x) = (-x)^2 + 1 = x^2 + 1 = f(x)$.

Definiție. Fiind dată funcția numerică $f: A \to B$, unde A este mulțime simetrică, spunem că ea este funcție impară dacă $f(-x) = -f(x) (\forall) x \in A$.

Exemplu. Funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = x^3 - x$ este funcție impară, deoarece $f(-x) = (-x)^3 + x = -x^3 + x = -f(x)$.

Definiție. Fiind dată funcția numerică $f: A \to B$, spunem că ea este funcție periodică dacă există un număr $T \neq 0$, astfel încât $f(x + T) = f(x) (\forall) x \in A$.

Exemplu. Funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = \{x + 1\}$ este funcție periodică de perioadă 1, deoarece $f(x) = \{x + 1\} = \{x + 2\} = = f(x + 1)$.

3.3 Compunerea funcțiilor

Definiție. Fiind date funcțiile $f: A \to B, g: C \to D, f(A) \subset C$, numim compunerea funcției g cu funcția f, funcția notată $gof: A \to D$, unde $gof(x) = g\big(f(x)\big)$.

Exemple. a) Fie $f: \{1, 2, 3\} \to \{4, 5, 6\}, f(1) = 4, f(2) = 5, f(3) = 6$ și $g: \{4, 5, 6\} \to \{7, 8, 9\}, g(4) = 7, g(5) = 8, g(6) = 9$. Atunci $gof: \{1, 2, 3\} \to \{7, 8, 9\}$ și $gof(1) = g\big(f(1)\big) = g(4) = = 7,\ gof(2) = g\big(f(2)\big) = g(5) = 8, g\big(f(3)\big) = g(6) = 9$.

b) Fie $f, g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = x + 1, g(x) = x - 1$. Atunci: $gof: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, gof(x) = g(f(x)) = g(x + 1) = (x + 1) - 1 = x$ și $fog: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, fog(x) = f\big(g(x)\big) = f(x - 1) = (x - 1) + 1 = = x$.

Aplicații

1. Se consideră funcția $f: \mathbf{R} - \{1\} \to \mathbf{R}, f(x) = \frac{x+1}{x-1}$.

a) Să se rezolve ecuația: $(fofof)(x) = 2$.

b) Să se rezolve ecuația: $(fofofof)(x) = 2$.

c) Să se rezolve ecuația: $(fofofofof)(x) = 2$.

Soluție.

$$(f\circ f)(x)=f(f(x))=f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=\frac{\frac{x+1}{x-1}+1}{\frac{x+1}{x-1}-1}=\frac{2x}{2}=x\,.$$

a) $(f\circ f\circ f)(x)=(f\circ f)(f(x))=f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$.

Ecuaţia devine: $\dfrac{x+1}{x-1}=2\Rightarrow x+1=2x-2\Rightarrow x=3$.

b) $(f\circ f\circ f\circ f)(x)=(f\circ f)(f\circ f(x))=(f\circ f)(x)=x$.

Ecuaţia devine: $x=2$.

c) $(f\circ f\circ f\circ f\circ f)(x)=(f\circ f\circ f\circ f)(f(x))=f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$

Ecuaţia devine: $\dfrac{x+1}{x-1}=2\Rightarrow x+1=2x-2\Rightarrow x=3$.

2. Fie funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=x+1$. Să se determine funcţia g : $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ astfel încât $f\circ g(x)=2x+3$.

Soluţie. $f\circ g(x)=2x+3\Leftrightarrow f(g(x))=2x+3\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow g(x)+1=2x+3\Leftrightarrow g(x)=2x+2$.

4. Funcția de gradul I

4.1 Ecuația de gradul I

Definiție. Ecuația liniară $ax + b = 0$, unde $a, b \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$ se numește ecuație de gradul întâi.

Soluția ecuației de gradul întâi este $x = -\frac{b}{a}$.

Exemplu. Ecuația $2x - 3 = 0$ are soluția $x = \frac{3}{2}$.

Aplicații

1. Să se rezolve ecuația:

$$(x + 1)(x + 2) + 18 = (x + 3)(x + 4).$$

Soluție. a) Prin desfacerea parantezelor obţinem:

$x^2 + 2x + x + 2 + 18 = x^2 + 3x + 4x + 12 \Rightarrow 4x = 8 \Rightarrow x = 2$.

2. Să se rezolve ecuația:

$$\frac{3 + 2x}{1 + 2x} + \frac{4x^2 - 2}{7 + 16x + 4x^2} = \frac{5 + 2x}{7 + 2x} + 1.$$

Soluție. a) Se aduce la acelaşi numitor şi se ţine seama de egalitatea $7 + 16x + 4x^2 = (1 + 2x)(7 + 2x)$ şi se obţine ecuaţia:

$(3 + 2x)(7 + 2x) + 4x^2 - 2 = (5 + 2x)(1 + 2x) + 7 + 16x + 4x^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 8x - 7 = 0 \Rightarrow x = \frac{7}{8}$.

4.2 Funcția afină

a) Definiția funcției afine

Funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = ax + b = 0$, unde $a, b \in \mathbf{R}$, se numește **funcție afină**.

Funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = ax + b = 0$, unde $a, b \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$ se numește **funcție de gradul întâi**.

Exemplu. a) Funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x + 4$ este funcție afină și se numește **funcție de gradul întâi**.
b) Funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = 6$ este funcție afină și se mai numește **funcție constantă**.

b) Monotonia funcției de gradul întâi

Funcția de gradul întâi $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = ax + b$, unde $a, b \in \mathbf{R}, a \neq 0$ este:
1) strict crescătoare dacă $a > 0$;
2) strict descrescătoare dacă $a < 0$.

Exemple. a) Funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 2x + 4$ este crescătoare, deoarece $a = 2 > 0$.
b) Funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = -x + 2$ este descrescătoare, deoarece $a = -1 < 0$.

c) Semnul funcției de gradul întâi

Funcția de gradul întâi $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = ax + b$, unde $a, b \in \mathbf{R}, a \neq 0$ are semnul dat de tabelul:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x) = ax + b$	semn contrar lui a		0	semnul lui a	

Exemplu. Funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = -x + 4$ are semnul:

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$f(x) = -x + 4$		$+$	0	$-$	

d) Inecuații liniare cu o necunoscută

Inecuația care în urma unor transformări elementare succesive capătă una din formele: $ax + b \geq 0$ sau $ax + b > 0$ sau $ax + b \leq$

≤ 0 sau $ax + b < 0$, unde $a, b \in \mathbf{R}$ se numește **inecuație liniară cu o necunoscută**.

Dacă $a \neq 0$, **inecuație liniară cu o necunoscută** devine **inecuație de gradul întâi cu o necunoscută**.

Exemplu. $\frac{2x+3}{2} < \frac{5x+2}{3} \Leftrightarrow 3(2x+3) < 2(5x+2) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 6x + 9 < 10x + 4 \Leftrightarrow -4x + 5 < 0.$

e) Rezolvarea inecuației de forma $ax + b \geq 0$ unde $a, b \in \mathbf{R}$ **.**

Prezentăm mai jos două metode de rezolvare

1) Dacă $a > 0, ax + b \geq 0 \Leftrightarrow ax \geq -b \Leftrightarrow x \geq -\frac{b}{a}$;

Dacă $a < 0, ax + b \geq 0 \Leftrightarrow ax \geq -b \Leftrightarrow x \leq -\frac{b}{a}$;

Dacă $a = 0, ax + b \geq 0 \Leftrightarrow b \geq 0$;

Dacă $b \geq 0$, atunci orice $x \in \mathbf{R}$ este soluție.

Dacă $b < 0$, atunci nu există soluție a inecuației.

Exemplu. $-2x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow -2x \geq -3 \Leftrightarrow 2x \leq 3 \Leftrightarrow x \leq \frac{3}{2}$.

2) Se studiază semnul funcției $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = ax + b$ și se determină semnul funcției interpretând tabelul.

Exemplu. Pentru rezolvarea inecuației $x - 2 \geq 0$ facem tabelul:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$x-2$		$-$	0	$+$	

Soluția este $x \in [2, +\infty)$.

Pentru celelalte 3 cazuri: $ax + b > 0$ sau $ax + b \leq 0$ sau $ax + b < 0$ se procedează analog.

f) Poziția relativă a două drepte. Sisteme de ecuații de gradul I

Sistemul $\begin{cases} ax + by = c \\ mx + ny = p \end{cases}$, $a, b, c, m, n, p \in \mathbf{R}$, se rezolvă

folosind metoda reducerii sau metoda substituției, învățate în ciclul gimnazial.

Cele două ecuații ale sistemului reprezintă ecuațiile a două drepte în plan. Soluția sistemului (x_0, y_0), reprezintă punctul de intersecție al celor două drepte din plan.

Două drepte în plan pot fi concurente, paralele sau confundate. Dacă cele două drepte sunt concurente, atunci sistemul are soluție unică și se numește compatibil determinat. Dacă cele două drepte sunt paralele, atunci sistemul nu are soluție și se numește incompatibil. Dacă cele două drepte sunt confundate, atunci sistemul are o infinitate de soluții și se numește incompatibil.

Exemplu. Să se rezolve și să se interpreteze geometric sistemele de ecuații:

a) $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 3x - 2y = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + 4y = 7 \end{cases}$.

Soluție. a) Folosind metoda reducerii sau substituției se obține soluția $x = 1, y = 2$. Punctul $(1, 2)$ reprezintă punctul de intersecție al graficelor dreptelor $2x + y - 4 = 0$ și $3x - 2y + 1 = 0$.

b) Înmulțind prima ecuație cu -2 și adunând la a doua ecuație obținem: $0 = 1$. Sistemul este incompatibil și atunci cele două drepte $x + 2y - 3 = 0$ și $2x + 4y - 7 = 0$ sunt paralele.

5. Funcția de gradul al doilea

5.1 Ecuația de gradul al doilea

a) Forma ecuației de gradul al doilea

Ecuația de gradul al doilea are forma:

$$ax^2 + bx + c = 0, a, b, c \in \mathbf{R}, a \neq 0.$$

Discriminantul ecuației este: $\Delta = b^2 - 4ac$.

Dacă $\Delta > 0$, atunci ecuația are două soluții reale date de:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Dacă $\Delta = 0$, atunci ecuația are o soluție reală dată de:

$$x_{1,2} = \frac{-b}{2a}.$$

Dacă $\Delta < 0$, atunci ecuația nu are nici o soluție reală.

Exemple. a) Ecuația $x^2 - 3x + 2 = 0$ are $\Delta = 1$ și soluțiile 1 și 2.

b) Ecuația $x^2 - 4x + 4 = 0$ are $\Delta = 0$ și soluția 2.

c) Ecuația $x^2 - x + 1 = 0$ are $\Delta = -3$ și nu are soluții reale.

b) Relațiile lui Viete

Fiind dată **ecuația de gradul al doilea**:

$$ax^2 + bx + c = 0, a, b, c \in \mathbf{R}, a \neq 0,$$

relațiile lui Viete, sau relațiile între rădăcini și coeficienți sunt:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ și } x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Formule importante:

1) $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2;$

2) $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2);$

3) $x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2 x_2^2 = \cdots;$

4) $x_1^6 + x_2^6 = (x_1^2 + x_2^2)^3 - 3x_1^2 x_2^2 (x_1^2 + x_2^2).$

Exemple. Fără a rezolva ecuația $x^2 - x + 2 = 0$, să se calculeze:

a) ${x_1}^2 + {x_2}^2$ b) ${x_1}^3 + {x_2}^3$ c) ${x_1}^4 + {x_2}^4$.

Soluție. Avem: $x_1 + x_2 = 1$ și $x_1 x_2 = 2$.

a) ${x_1}^2 + {x_2}^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 1^2 - 4 = -3$.

b) ${x_1}^3 + {x_2}^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2) = 1 - 6 = -5$.

c) ${x_1}^4 + {x_2}^4 = ({x_1}^2 + {x_2}^2)^2 - 2{x_1}^2 {x_2}^2 = (-3)^2 - 2 \cdot 4 = 1$.

c) Formarea ecuației de gradul al doilea când se cunosc rădăcinile

Dacă se cunosc rădăcinile x_1, x_2 ale ecuației, notăm $x_1 + x_2 = S, x_1 x_2 = P$ și atunci ecuația de gradul al doilea care are ca rădăcini pe x_1 și x_2 este: $x^2 - Sx + P = 0$.

Exemplu. Dacă 1 și 2 sunt rădăcini ale unei ecuații, atunci $S = 1 + 2 = 3, P = 1 \cdot 2 = 2$, iar ecuația care are ca rădăcini pe 1 și 2 este: $x^2 - 3x + 2 = 0$.

d) Descompunerea trinomului de gradul al doilea în factori de gradul întâi

Fiind dat **trinomul de gradul al doilea** $ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbf{R}, a \neq 0$, având rădăcinile x_1, x_2, atunci avem:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Exemplu. Fiind dat trinomul $x^2 - 5x + 4$, ecuația asociată acestuia este $x^2 - 5x + 4 = 0$ cu rădăcinile 1 și 4, și atunci:

$$x^2 - 5x + 4 = 1(x - 1)(x - 4).$$

e) Semnele rădăcinilor ecuației de gradul al doilea

Fiind dată **ecuația de gradul al doilea**:

$$ax^2 + bx + c = 0, a, b, c \in \mathbf{R}, a \neq 0,$$

și $x_1 + x_2 = S, x_1 x_2 = P$, atunci avem:

a) dacă $P > 0, S > 0$, atunci ambele rădăcini sunt pozitive.

b) dacă $P > 0, S < 0$, atunci ambele rădăcini sunt negative.

c) dacă $P < 0, S > 0$, atunci o rădăcină este pozitivă și una este negativă, mai mare în valoare absolută fiind cea pozitivă.
d) dacă $P < 0, S < 0$, atunci o rădăcină este pozitivă și una este negativă, mai mare în valoare absolută fiind cea negativă.
e) dacă $P < 0, S = 0$, atunci o rădăcină este pozitivă și una este negativă, ele fiind egale în valoare absolută.
f) dacă $P = 0, S > 0$, atunci o rădăcină este 0 și cealaltă este pozitivă.
g) dacă $P = 0, S < 0$, atunci o rădăcină este 0 și cealaltă este negativă.
h) dacă $P = 0, S = 0$, atunci ambele rădăcini sunt egale cu 0.

Observație. Dacă $\Delta < 0$, atunci rădăcinile nu sunt reale și în consecință nu au semne.

Exemple. a) Ecuația $x^2 - 5x + 1 = 0$ are $\Delta = 21, S = 5$, $P = 1$. Atunci ambele rădăcini sunt pozitive.
b) Ecuația $2x^2 - 7x - 1 = 0$ are $\Delta = 57, S = \frac{7}{2}$ și $P = -\frac{1}{2}$. Atunci o rădăcină este pozitivă și una negativă, mai mare în valoare absolută este cea pozitivă.

5.2 Funcția de gradul al doilea

a) Definiție. Se numește **funcție de gradul al doilea** funcția de forma $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = ax^2 + bx + c, a, b, c \in \mathbf{R}, a \neq 0$.

Exemplu. Funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = x^2 + x + 1$ este funcție de gradul al doilea.

b) Monotonia funcției de gradul al doilea

1) Dacă $a > 0$, funcția este strict descrescătoare pe intervalul $\left(-\infty, \frac{-b}{2a}\right]$ și strict crescătoare pe intervalul $\left[\frac{-b}{2a}, +\infty\right)$.
2) Dacă $a < 0$, funcția este strict crescătoare pe intervalul

$\left(-\infty, \frac{-b}{2a}\right]$ și strict descrescătoare pe intervalul $\left[\frac{-b}{2a}, +\infty\right)$.

Exemplu. Funcția $f(x) = x^2 - 2x + 7$ este strict descrescătoare pe intervalul $(-\infty, 1]$ și crescătoare pe intervalul $(1, +\infty)$.

c) Forma canonică a funcției de gradul al doilea

Forma canonică a **trinomului de gradul al doilea** este:

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right].$$

Exemple. a) Pentru funcția $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$, avem:

$f(x) = 2\left[(x-1)^2 + \frac{3}{2}\right] = 2(x-1)^2 + 3.$

b) Pentru funcția $f(x) = -x^2 + 2x + 1$, avem:

$f(x) = -[(x-1)^2 - 2] = -(x-1)^2 + 2.$

d) Maximul sau minimul funcției de gradul al doilea

1) Dacă $a > 0$, funcția de gradul al doilea are un minim egal cu $-\frac{\Delta}{4a}$ și care se realizează pentru $x = -\frac{b}{2a}$.

2) Dacă $a < 0$, funcția de gradul al doilea are un maxim egal cu $-\frac{\Delta}{4a}$ și care se realizează pentru $x = -\frac{b}{2a}$.

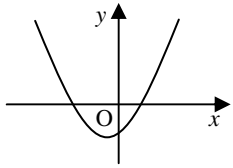
Exemple. a) Funcția $f(x) = x^2 - x + 2$ are un minim egal cu $-\frac{\Delta}{4a} = -\frac{-7}{4} = \frac{7}{4}$, obținut pentru $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-1}{2} = \frac{1}{2}$.

b) Funcția $f(x) = -2x^2 + x + 1$ are un maxim egal cu: $-\frac{\Delta}{4a} = -\frac{9}{-8} = \frac{9}{8}$, obținut pentru $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{-4} = \frac{1}{4}$.

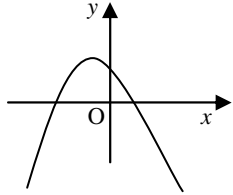
e) Graficul funcției de gradul al doilea

Graficul funcției de gradul al doilea este o parabolă:

1) cu vârful în jos dacă $a > 0$



2) cu vârful în sus dacă $a < 0$



f) Semnul funcției de gradul al doilea

1) Dacă $\Delta < 0$, semnul funcției este dat de tabelul:

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$	semnul lui a		

2) Dacă $\Delta = 0$, semnul funcției este dat de tabelul:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	semnul lui a	0	semnul lui a

3) Dacă $\Delta > 0$, semnul funcției este dat de tabelul:

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$f(x)$	semnul lui a	0	semn contrar lui a	0	semnul lui a

Exemple. a) Pentru funcția $f(x) = x^2 + x + 3$ avem:

$\Delta = -11 < 0$ și atunci funcția păstrează semnul lui $a = 1$, adică este pozitivă pe **R**.

b) Pentru funcția $f(x) = x^2 - 3x + 2$ avem: $x_1 = 1, x_2 = 2$ și atunci semnul funcției este dat de tabelul:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Aplicații

1. Să se determine funcția de gradul al doilea

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$$

al cărui grafic trece prin punctele $A(1,-2), B(3,0), C(-1,12)$.

Soluție. Se pun condițiile: $f(1) = -2$, $f(3) = 0$, $f(-1) = 12$.

Se obține sistemul: $\begin{cases} a + b + c = -2 \\ 9a + 3b + c = 0 \\ a - b + c = 12 \end{cases}$

cu soluțiile: $a = 2, b = -7, c = 3$. Atunci $f(x) = 2x^2 - 7x + 3$.

2. Să se studieze monotonia funcției

$$f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, x \in [2, +\infty) \\ 2x - 7, \ \ x \in (-\infty, 2) \end{cases}.$$

Soluție. a) Pe $\left[2, +\infty\right)$, $f(x) = x^2 - 2x$ este crescătoare, iar punctul de minim este $(2, 0)$.

Pe intervalul $(-\infty, 2]$ funcția $f(x) = 2x - 7$ este crescătoare și toate punctele graficului se găsesc sub punctul $(2, -3)$. Deoarece $-3 < 0$ rezultă că funcția este crescătoare.

3. Să se arate că vârfurile parabolelor asociate funcției:

$$f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = x^2 - (a+1)x + a - 3$$

unde $a \in \mathbf{R}$, se găsesc pe o parabolă.

Soluție. Coordonatele vârfului sunt:

$$x_V = \frac{a+1}{2}, \quad y_V = \frac{-a^2 + 2a - 13}{4}.$$

Scoatem din prima ecuație $a = 2x - 1$, înlocuim în a doua ecuație și obținem: $4y = -(2x-1)^2 + 2(2x-1) - 13 \Rightarrow$ $4y = -4x^2 + 4x - 1 + 4x - 2 - 13 \Rightarrow$ $y = -x^2 + 2x - 4$, adică ecuaţia unei parabole.

4. Să se arate că oricare ar fi $a \in \mathbf{R}$, parabolele asociate funcțiilor $f_a: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f_a(x) = x^2 + (a-4)x + 2 - a$ trec prin cel puțin un punct fix.

Soluție. Fie $y = x^2 + (a-4)x + 2 - a \Rightarrow a(x-1) + x^2 - 4x - -y + 2 = 0$ $(\forall)\, a \in \mathbf{R} \Rightarrow x - 1 = 0$ și $x^2 - 4x - y + 2 = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow x = 1,\ y = -1.$

6. Mulțimi de numere

6.1 Numere reale

6.1.1 Puteri cu exponent întreg

Definiție. Dacă $a \in \mathbf{R}$, și $n \in \mathbf{N}$, atunci definim $a^0 = 1$ și $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{\text{de } n \text{ ori}}$. Dacă în plus $a \neq 0$, atunci $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Observație. Operațiile 0^0 și 0^{-n} nu au sens.

Proprietăți. Pentru orice $a, b \in \mathbf{R}$ și $m, n \in \mathbf{Z}$ care nu conduc la operații fără sens, avem:

1) $a^m a^n = a^{m+n}$ **2)** $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

3) $(a^m)^{-1} = a^{-m}$ **4)** $(a^m)^n = a^{mn}$

5) $(ab)^m = a^m b^m$ **6)** $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$.

Exemple. a) $2^1 2^2 = 2^{1+2} = 2^3 = 8$.
b) $(2^3)^4 = 2^{3 \cdot 4} = 2^{12}$.

6.1.2 Radicali

Definiție. Fiind dat numărul real și pozitiv a și numărul natural n, numim radical de ordinul n al numărului a, numărul real pozitiv x, astfel încât $x^n = a$.

Radicalul de ordin n al lui a se notează: $\sqrt[n]{a}$.

Definiție. Fiind dat numărul real și negativ a și numărul natural impar n, numim radical de ordinul n al numărului a, numărul real negativ x, astfel încât $x^n = a$.

Proprietăți.

1) Dacă $a \in \mathbf{R}$, atunci $\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|$.

2) Dacă n este impar, atunci $\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$.

3) Amplificarea radicalului:

Dacă $a > 0$ și $m, n, p \in \mathbf{N}$, atunci $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}$.

4) Simplificarea radicalului:

Dacă $a > 0$ și $m, n, p \in \mathbf{N}$, atunci $\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}$.

5) Radicalul unui produs a doi factori:

a) Dacă *n* este par și $a \geq 0, b \geq 0$ atunci $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$.

b) Dacă *n* este impar atunci $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$.

c) Dacă *n* este impar și $a < 0, b < 0$ atunci $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{|a|}\sqrt[n]{|b|}$.

6) Produsul a doi radicali:

Dacă $a, b \in \mathbf{R}$, atunci $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$.

7) Radicalul câtului a două numere:

a) Dacă *n* este par și $a \geq 0, b \geq 0$ atunci $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.

b) Dacă *n* este impar și $a, b \in \mathbf{R}, b \neq 0$ atunci $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.

c) Dacă *n* este impar și $a < 0, b < 0$ atunci $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{|a|}}{\sqrt[n]{|b|}}$.

8) Câtul a doi radicali:

Dacă $a, b \in \mathbf{R}, b \neq 0$ atunci $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$.

9) Scoaterea unui factor de sub radical:

a) Dacă *n* este par atunci $\sqrt[n]{a^n b} = |a|\sqrt[n]{b}$.

b) Dacă *n* este impar atunci $\sqrt[n]{a^n b} = a\sqrt[n]{b}$.

10) Introducerea unui factor sub radical:

a) Dacă *n* este par și $a \geq 0$, atunci $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$.

b) Dacă *n* este par și $a < 0$, atunci $a\sqrt[n]{b} = -\sqrt[n]{a^n b}$ **.**

c) Dacă *n* este impar atunci $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$.

11) Ridicarea la putere a unui radical:

a) Dacă *n* este par și $a \geq 0$, atunci $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$.

b) Dacă *n* este impar și $a \in \mathbf{R}$, atunci $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$.

12) Extragerea radicalului din radical:

a) Dacă *m*, *n* sunt impare și $a \in \mathbf{R}$, atunci $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$.

b) Dacă *m* par sau *n* par și $a \geq 0$, atunci $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$.

Exemple. a) $\sqrt[12]{64} = \sqrt[12]{2^6} = \sqrt{2}$.

b) $\sqrt[3]{8 \cdot 5} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 5} = 2\sqrt[3]{5}$.

c) $\left(\sqrt{a}\right)^5 = \sqrt{a^5}$.

Compararea radicalilor:

a) Dacă *n* este par și $a > 0, b > 0$, atunci:

$$a < b \Leftrightarrow \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}.$$

b) Dacă *n* este impar și $a, b \in \mathbf{R}$ atunci:

$$a < b \Leftrightarrow \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}.$$

Exemplu. $3\sqrt{5} = \sqrt{3^2 \cdot 5} = \sqrt{45}$ și $5\sqrt{3} = \sqrt{5^2 \cdot 3} =$ $= \sqrt{75}$. Atunci evident $3\sqrt{5} < 5\sqrt{3}$.

Raționalizarea numitorului unei fracții se face amplificând fracția cu **conjugata numitorului.**

Exemple.

a) $\dfrac{1}{\sqrt{a}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}} = \dfrac{\sqrt{a}}{a}, a \neq 0;$

b) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}} = \dfrac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a^2}} = \dfrac{\sqrt[3]{a^2}}{a};$

c) $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}=\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}, a\neq b;$

d) $\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}=\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}, a\neq b;$

e) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}=\dfrac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}=$

$=\dfrac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{a-b}, a\neq b.$

Formulele radicalilor compuși

Dacă $a>0, b>0, a^2\geq b$, și $c=\sqrt{a^2-b}$, atunci avem:

a) $\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a+c}{2}}+\sqrt{\dfrac{a-c}{2}};$

b) $\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a+c}{2}}-\sqrt{\dfrac{a-c}{2}}.$

Exemplu. $\sqrt{3-\sqrt{8}}=\sqrt{\dfrac{3+1}{2}}-\sqrt{\dfrac{3-1}{2}}=\sqrt{2}-1.$

Aplicații

1. Să se ordoneze crescător numerele:

$$2\sqrt{3}, 3\sqrt{2}, \sqrt{15}, 6\sqrt{2}.$$

Soluție. $2\sqrt{3}=\sqrt{12}, 3\sqrt{2}=\sqrt{18}, 6\sqrt{2}=\sqrt{72}.$
Evident ordinea este: $2\sqrt{3}, \sqrt{15}, 3\sqrt{2}, 6\sqrt{2}.$

2. Să se verifice egalitatea:

$$\sqrt{5+\sqrt{24}}+\sqrt{5-\sqrt{24}}=\sqrt{12}.$$

Soluție. $\sqrt{5+\sqrt{24}}+\sqrt{5-\sqrt{24}}=\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{2}=$
$=2\sqrt{3}=\sqrt{12}.$

6.1.3 Puteri cu exponent rațional

Definiție. Fie $a>0, m, n \in \mathbf{N}^*, n \geq 2$. Atunci $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$, și $a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$. Pentru $a=0$, avem: $0^{\frac{m}{n}}=0$.

Proprietăți. Pentru $a>0, b>0$ și $p, q \in \mathbf{Q}$ avem:

1) $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$;
2) $a^p : a^q = a^{p-q}$, unde $a \neq 0$;
3) $(a^p)^q = a^{pq}$;
4) $(ab)^p = a^p \cdot b^p$;
5) $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$, unde $b \neq 0$.

6.1.4 Puteri cu exponent real

Proprietăți. Pentru $a>0, b>0$ și $p, q \in \mathbf{R}$ avem:

1) $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$;
2) $a^p : a^q = a^{p-q}$, unde $a \neq 0$;
3) $(a^p)^q = a^{pq}$;
4) $(ab)^p = a^p \cdot b^p$;
5) $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$, unde $b \neq 0$.

Exemple. a) $2^{\sqrt{2}} \cdot 2^{-\sqrt{2}} = 2^{\sqrt{2}-\sqrt{2}} = 2^0 = 1$.
b) $\left(2\sqrt{3}\right)^4 = 2^4 \cdot \left(\sqrt{3}\right)^4 = 16 \cdot 9 = 144$.

Compararea puterilor cu exponent real

Dacă $a > 1$ și $x, y \in \mathbf{R}$, atunci $a^x < a^y \Leftrightarrow x < y$.
Dacă $0 < a < 1$ și $x, y \in \mathbf{R}$, atunci $a^x < a^y \Leftrightarrow x > y$.
Exemplu. $1 < \sqrt{2} < \sqrt{3} \Rightarrow 3^1 < 3^{\sqrt{2}} < 3^{\sqrt{3}}$.

6.2 Logaritmi

Definiție. Logaritmul unui număr real pozitiv *A* este exponentul *x* la care trebuie să ridicăm un număr real pozitiv și diferit de 1, notat *a* și numit bază, pentru a obține pe *A*.

Scriem: $\log_a A = x$, unde $A > 0, a > 0, a \neq 1$.
Observație. $\log_a 1 = 0, a > 0, a \neq 1$.
Exemple. a) $\log_2 8 = 3$, deoarece $2^3 = 8$.
b) $\log_{\frac{1}{2}} 4 = -2$, deoarece $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 2^2 = 4$.

Proprietăți.

Dacă $A > 0, B > 0, a > 0, a \neq 1, b \in \mathbf{R}$, atunci:
1) $\log_a(AB) = \log_a A + \log_a B$.
2) $\log_a \frac{A}{B} = \log_a A - \log_a B$.
2′) $\log_a \frac{1}{B} = -\log_a B$.
3) $\log_a A^b = b \log_a A$.
3′) $\log_a a^b = b$.
4) $\log_a \sqrt[n]{A} = \frac{\log_a A}{n}$.

Exemple. a) $\log_2 5 \cdot 6 = \log_2 5 + \log_2 6$.
b) $\log_2 20 = \log_2 4 \cdot 5 = \log_2 4 + \log_2 5 = 2 + \log_2 5$.
c) $\log_2 4^3 = 3 \log_2 4 = 3 \cdot 2 = 6$.

Formula de schimbare de bază a unui logaritm

Dacă $A > 0,\ a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1$ atunci:

$$\log_a A = \frac{\log_b A}{\log_b a}.$$

Exemplu. a) Având logaritmul $\log_4 20$ îl schimbăm în baza astfel: $\log_4 20 = \frac{\log_2 20}{\log_2 4} = \frac{\log_2 4 + \log_2 5}{2} = \frac{2 + \log_2 5}{2}$.

Compararea logaritmilor care au aceeași bază

Dacă $0 < a < 1$, atunci $0 < x < y \Leftrightarrow \log_a x > \log_a y$.

Dacă $a > 1$, atunci $0 < x < y \Leftrightarrow \log_a x < \log_a y$.

Exemple. a) $0 < 0{,}5 < 1$ și atunci $\log_{0,5} 5 > \log_{0,5} 8$.
b) $3 > 1$ și atunci $\log_3 8 < \log_3 10$.

Aplicații

1. Să se aducă la forma cea mai simplă expresia:

$$\lg\frac{1}{2} + \lg\frac{2}{3} + \lg\frac{3}{4} + \lg\frac{4}{5} + \lg\frac{5}{6} + \lg\frac{6}{7} + \lg\frac{7}{8}.$$

Soluție. $\lg\frac{1}{2} + \lg\frac{2}{3} + \lg\frac{3}{4} + \lg\frac{4}{5} + \lg\frac{5}{6} + \lg\frac{6}{7} + \lg\frac{7}{8} =$

$$= \lg\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{7}{8} = \lg\frac{1}{8} = \lg 1 - \lg 8 = -\lg 8.$$

2. Să se aducă la forma cea mai simplă expresia:

$$\log_{\frac{1}{2}} 2 + \log_{\frac{1}{4}} 4 + \log_{\frac{1}{8}} 8 + \log_{\frac{1}{16}} 16 + \log_{\frac{1}{32}} 32.$$

Soluție. $\log_{\frac{1}{2}} 2 + \log_{\frac{1}{4}} 4 + \log_{\frac{1}{8}} 8 + \log_{\frac{1}{16}} 16 + \log_{\frac{1}{32}} 32 =$

$$= \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + \log_{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{4}\right)^{-1} + \log_{\frac{1}{8}} \left(\frac{1}{8}\right)^{-1} + \log_{\frac{1}{16}} \left(\frac{1}{16}\right)^{-1} +$$

$$+ \log_{\frac{1}{32}} \left(\frac{1}{32}\right)^{-1} = -1 - 1 - 1 - 1 - 1 = -5 .$$

3. Să se demonstreze inegalitatea:

$$\frac{1}{\log_2 8} + \frac{1}{\log_4 8} + \frac{1}{\log_6 8} < 2 .$$

Soluție. Se trec logaritmii în baza 8 și se obține:

$$\log_8 2 + \log_8 4 + \log_8 6 < 2 \Leftrightarrow \log_8 48 < 2 \Leftrightarrow 48 < 8^2$$

4. Să se arate că dacă $\boldsymbol{a, b} \in (\mathbf{0}, \mathbf{1})$, atunci:

$$\log_a \frac{2ab}{a+b} + \log_b \frac{2ab}{a+b} \geq 2 .$$

Soluție.

$$\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \Rightarrow \log_a \frac{2ab}{a+b} \geq \log_a \sqrt{ab} = \frac{1}{2} \log_a ab =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \log_a b\right) \text{ și } \log_b \frac{2ab}{a+b} \geq \frac{1}{2} \log_a ab = \frac{1}{2}\left(\log_b a + 1\right) .$$

Atunci:

$$\log_a \frac{2ab}{a+b} + \log_b \frac{2ab}{a+b} \geq \frac{1}{2}\left(1 + \log_a b\right) + \frac{1}{2}\left(1 + \log_b a\right) =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\left(\log_a b + \log_b a\right) = 1 + \frac{1}{2}\left(\log_a b + \frac{1}{\log_a b}\right) > 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 = 2$$

6.3 Mulțimea numerelor complexe

6.3.1 Numere complexe sub formă algebrică

Definiție. Mulțimea numerelor complexe este:

$$\{z = x + yi \mid x, y \in \mathbf{R}, i^2 = -1\}.$$

Scrierea $z = x + yi$ se numește **forma algebrică** a numărului complex z. Numărul $x \in \mathbf{R}$ se numește **partea reală** a lui z și se notează **Re** z, iar numărul $y \in \mathbf{R}$ este coeficientul **părții imaginare** a lui z și se notează **Im** z.

Exemplu. Pentru numărul complex $2 + 3i$, 2 este partea reală și 3 este coeficientul părții imaginare.

Conjugatul unui număr complex

Fiind dat numărul complex $z = x + yi$, numărul $\bar{z} = x - yi$ se numește **conjugatul numărului** complex z.

Exemple. Conjugatul lui $3 + i$ este $3 - i$ și conjugatul lui $2 - i$ este $2 + i$.

Egalitatea a două numere complexe

Două numere complexe $z_1 = x_1 + y_1 i$ și $z_2 = x_2 + y_2 i$ sunt **egale** dacă și numai dacă $x_1 = x_2$ și $y_1 = y_2$.

Exemplu. Numerele complexe $x + 1 + yi$ și $2x + (2y - 1)i$ sunt egale dacă $x + 1 = 2x$ și $y = 2y - 1$, adică $x = 1, y = 1$.

Puterile numărului *i*

Puterile numărului i sunt: $i = i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1,$ $i^5 = i, i^6 = -1, i^7 = -i, i^8 = 1, \cdots$. Pentru $n \in N^*$avem:

$$i^n = \begin{cases} 1, & n = 4k \\ i, & n = 4k+1 \\ -1, & n = 4k+2 \\ -i, & n = 4k+3 \end{cases}.$$

Exemple. $i^{99} = -i, i^{1000} = 1, i^{2001} = i, i^{2010} = -1.$

Operații cu numere complexe

1) Adunarea numerelor complexe

Fiind date numerele complexe $z_1 = x_1 + y_1 i$ și $z_2 = x_2 + y_2 i$, definim:

$z_1 + z_2 = (x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i.$

Exemplu. $(2 + 3i) + (5 - i) = 7 + 2i.$

2) Scăderea numerelor complexe

Fiind date numerele complexe $z_1 = x_1 + y_1 i$ și $z_2 = x_2 + y_2 i$, definim:

$z_1 - z_2 = (x_1 + y_1 i) - (x_2 + y_2 i) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i.$

Exemplu. $(5 - 2i) - (3 - 5i) = (5 - 3) + (-2 + 5)i =$
$= 2 + 3i.$

3) Înmulțirea numerelor complexe

Fiind date numerele complexe $z_1 = x_1 + y_1 i$ și $z_2 = x_2 + y_2 i$, definim:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + y_1 i) \cdot (x_2 + y_2 i) =$$
$$= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + y_1 x_2)i.$$

Exemplu. $(3 - i)(2 + i) = (6 + 1) + (3 - 2)i = 7 + i.$

4) Împărțirea numerelor complexe

Fiind date numerele complexe $z_1 = x_1 + y_1 i$ și $z_2 = x_2 + y_2 i$, definim:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + y_1 i}{x_2 + y_2 i} = \frac{(x_1 + y_1 i)(x_2 - y_2 i)}{(x_2 + y_2 i)(x_2 - y_2 i)} =$$
$$= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} i.$$

Exemplu. $\frac{1+i}{2-i}=\frac{(1+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\frac{2-1+(1+2)i}{4+1}=$
$=\frac{1+3i}{5}=\frac{1}{5}+\frac{3}{5}i.$

Proprietăți ale numerelor complexe

1) $\overline{z_1+z_2}=\bar{z_1}+\bar{z_2}$.
2) $\overline{z_1-z_2}=\bar{z_1}-\bar{z_2}$.
3) $\overline{z_1\cdot z_2}=\bar{z_1}\cdot\bar{z_2}$.
4) $\overline{(z^n)}=(\bar{z})^n$.
5) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z_1}}{\bar{z_2}}$.
6) $\bar{\bar{z}}=z$.
7) $z\in\mathbf{R}\Leftrightarrow\bar{z}=z$.
8) $z\in\mathbf{C}\Leftrightarrow\bar{z}=-z$.

Exemple. a) Fiind date $z_1=1+i$ și $z_2=2-i$, atunci $\overline{z_1+z_2}=\bar{z_1}+\bar{z_2}=1-i+2+i=3$.
b) Fiind date $z_1=2+i$ și $z_2=1-i$, atunci $\overline{z_1\cdot z_2}=\bar{z_1}\cdot\bar{z_2}=(2-i)\cdot(1+i)=3+i$.

Modulul unui număr complex

Modulul numărului complex $z=x+yi$ este numărul pozitiv

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Exemplu. Pentru $z=3+4i$, $|z|=\sqrt{3^2+4^2}=5$.

Proprietăți ale modulului unui număr complex

1) $|z|=0\Leftrightarrow z=0$.
2) $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$.
3) $|z^n|=|z|^n$.
4) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$.

5) $|z| = |\bar{z}|$.

6) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

7) $z \cdot \bar{z} = |z|^2 - \text{caz particular} - |z| = 1 \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{1}{z}$.

Aplicații

1. Să se arate că dacă $z_1, z_2 \in \mathbf{C} - \mathbf{R}$ astfel încât $|z_1| = |z_2| = 1$, atunci:

$$\text{Im } \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2} = 0, \text{dacă } z_1 z_2 \neq -1.$$

Soluție. $|z_1| = |z_2| = 1 \Rightarrow \bar{z_1} = \frac{1}{z_1}$ și $\bar{z_2} = \frac{1}{z_2}$.

Știm că Im $z = 0 \Leftrightarrow \bar{z} = z$.

Vom demonstra că $\overline{\frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}} = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$.

$$\overline{\frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}} = \frac{\overline{z_1 + z_2}}{\overline{1 + z_1 z_2}} = \frac{\bar{z_1} + \bar{z_2}}{1 + \overline{z_1 z_2}} = \frac{\bar{z_1} + \bar{z_2}}{1 + \bar{z_1}\bar{z_2}} = \frac{\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}}{1 + \frac{1}{z_1} \cdot \frac{1}{z_2}} =$$

$$= \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}.$$

6.3.2 Reprezentarea geometrică a numerelor complexe

1) Interpretarea geometrică a unui număr complex

Fiind dat numărul complex $z = x + yi$, punctul $M(x, y)$ se numește **imaginea geometrică** a numărului complex z. Numărul z se numește afixul punctului M.

Exemplu. Pentru $z = 2 + 5i$, punctul $M(2, 5)$ este imaginea geometrică a lui z, iar z este afixul punctului M.

Interpretarea geometrică a modulului unui număr complex

Fiind dat numărul complex $z = x + yi$, **modulul** lui z reprezintă **distanța** dintre origine și imaginea geometrică a lui *z*.

Exemplu. Pentru $z = 3 + 4i$, imaginea geometrică a lui *z* este punctul $M(3,4)$, iar $|z| = |\overline{OM}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

Interpretarea geometrică a conjugatului unui număr complex

Fiind dat numărul complex $z = x + yi$, conjugatul lui z este $\bar{z} = x - yi$. Imaginea geometrică a lui $\bar{z}$ este simetricul imaginii geometrice a lui z față de axa Ox.

Exemplu. Fiind dat $z = 2 - i$, atunci $\bar{z} = 2 + i$. Imaginea geometrică a lui $\bar{z}$ este punctul $M(2,1)$ care este simetricul față de axa *Ox* a punctului $M(2,-1)$.

Interpretarea geometrică a sumei a două numere complexe

Fiind date numerele complexe $z_1 = x_1 + y_1 i$ și $z_2 = x_2 + y_2 i$, care au imaginile geometrice $M_1(x_1, y_1)$ și $M_2(x_2, y_2)$, atunci imaginea geometrică a sumei $z_1 + z_2$ este al patrulea vârf $M(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ al paralelogramului OM_1MM_2, unde O este originea axelor de coordonate.

Exemplu. Fiind date numerele complexe $z_1 = 1 + i$ și $z_2 = 2 + 3i$, imaginile geometrice ale acestora sunt punctele $M_1(1,1)$ și $M_2(2,3)$. Imaginea geometrică a lui $z_1 + z_2 = 3 + 4i$ este punctul $M(3,4)$ și evident OM_1MM_2 este paralelogram.

Interpretarea geometrică a diferenței a două numere complexe

Fiind date numerele complexe $z_1 = x_1 + y_1 i$ și $z_2 = x_2 + y_2 i$, care au imaginile geometrice $M_1(x_1, y_1)$ și $M_2(x_2, y_2)$, atunci

imaginea geometrică a diferenței $z_1 - z_2$ este imaginea geometrică a sumei $z_1 + (-z_2)$, adică al patrulea vârf $M(x_1 - x_2, y_1 - y_2)$ al paralelogramului $OM_1MM'_2$, unde O este originea axelor de coordonate și $M_2'(-x_2, -y_2)$ este imaginea geometrică a lui $-z_2 = -x_2 - y_2 i$.

Interpretarea geometrică a produsului dintre un număr real și un număr complex

Fiind date numerele $a \in \mathbf{R}$ și $z = x + yi \in \mathbf{C}$, care are imaginea geometrică $M(x, y)$, atunci imaginea geometrică a numărului az este punctul $M'(ax, ay)$, care este coliniar cu punctele O și M și în plus $OM' = |a|OM$.

Aplicații

1. Să se demonstreze că patrulaterul $ABCD$ este paralelogram dacă și numai dacă $z_A + z_C = z_B + z_D$.

Soluție. Segmentele AC și BD au același mijloc O. Atunci $\frac{z_A + z_C}{2} = \frac{z_B + z_D}{2} \Leftrightarrow z_A + z_C = z_B + z_D$.

2. Fie numerele complexe $z_1 = a + bi$ și $z_2 = c + di$, având ca imagini geometrice punctele A și respectiv B. Să se arate că afixul mijlocului M al segmentului $[AB]$ este $\frac{z_1 + z_2}{2}$.

Soluție. Se proiectează punctele A, B, M pe axele de coordonate. Proiecțiile lui M pe axe au coordonatele $\frac{a+c}{2}$ și $\frac{b+d}{2}$.

6.3.3 Rezolvarea de ecuații în C

Ecuația de gradul întâi cu coeficienți complecși

Forma ecuației: $az + b = 0, a, b \in \mathbf{C}$.

Soluția ecuației: $z = -\frac{b}{a}$. Se înmulțește cu conjugata

numitorului și se aduce la forma cea mai simplă.

Exemplu. Ecuația $(1+i)z = i$ are soluția:

$$z = \frac{i}{i+1} = \frac{i(1-i)}{1-i^2} = \frac{1+i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i.$$

Ecuația de gradul al doilea cu coeficienți reali rezolvată în C

Ecuația de gradul al doilea are forma:

$$ax^2 + bx + c = 0, a, b, c \in \mathbf{R}, a \neq 0.$$

Discriminantul ecuației este: $\Delta = b^2 - 4ac$.

Dacă $\Delta > 0$, atunci ecuația are două soluții reale și distincte.

Dacă $\Delta = 0$, atunci ecuația are două soluții reale și egale.

Dacă $\Delta < 0$, atunci ecuația are două soluții complex conjugate:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

Exemplu. Ecuația $x^2 - 2x + 2 = 0$, are $\Delta = -4$ și soluțiile:

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm i\sqrt{4}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i.$$

Ecuația de gradul al doilea cu coeficienți complecși rezolvată în C

Ecuația de gradul al doilea are forma:

$$ax^2 + bx + c = 0, a, b, c \in \mathbf{C}, a \neq 0.$$

Discriminantul ecuației este: $\Delta = b^2 - 4ac = (m+ni)^2$, unde *m* și *n* urmează să se determine.

Soluțiile ecuației sunt: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b \pm (m+ni)}{2a}$.

Exemplu. Ecuația $z^2 - iz - 1 - i = 0$ are $\Delta = i^2 + 4(1+i) = i^2 + 4i + 4 = (i+2)^2$. Soluțiile ecuației sunt:

$$x_{1,2} = \frac{i \pm \sqrt{(i+2)^2}}{2} = \frac{i \pm (i+2)}{2} \Rightarrow x_1 = i+1, x_2 = -1.$$

7. Funcții și ecuații

7.1 Funcții

7.1.1 Injectivitate, surjectivitate, bijectivitate. Funcții inversabile

Injectivitate

Definiție. O funcție $f : A \to B$ se numește **injectivă** dacă oricare ar fi $a, b \in A, a \neq b$, rezultă $f(a) \neq f(b)$.

Consecință. O funcție $f : A \to B$ este **injectivă** dacă oricare ar fi $a, b \in A$, astfel încât $f(a) = f(b)$, rezultă $a = b$.

Exemplu. Funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = 3x + 1$ este injectivă deoarece $f(a) = f(b) \Rightarrow 3a + 1 = 3b + 1 \Rightarrow a = b$.

Observație. O funcție $f : A \to B$ **nu este injectivă** dacă există $a, b \in A, a \neq b$, astfel încât $f(a) = f(b)$.

Exemplu. Funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = x^2 - 4x + 3$ nu este injectivă deoarece $1 \neq 3$ și $f(1) = f(3) = 0$.

Modalitate grafică de a verifica dacă o funcție numerică este sau nu injectivă

O funcție numerică $f : A \to B$ este **injectivă** dacă orice paralelă la axa *Ox* dusă prin punctele codomeniului, intersectează graficul funcției în cel mult un punct.

Surjectivitate

Definiție. O funcție $f : A \to B$ se numește **surjectivă** dacă oricare ar fi $b \in B$, există cel puțin un element $a \in A$ astfel încât $f(a) = b$.

Consecințe.

1) O funcție $f : A \to B$ este **surjectivă** dacă Im $f = B$.

2) O funcție $f : A \to B$ este **surjectivă** dacă oricare ar fi $b \in B$, ecuația în $x, f(x) = b$ are cel puțin o soluție în mulțimea A.

Exemplu. Funcția $f: \{1, 2, 3\} \to \{a, b\}, f(1) = f(2) = a$, $f(3) = b$, este surjectivă deoarece Im $f = B$.

Observație. O funcție $f : A \to B$ **nu este surjectivă** dacă există cel puțin un punct $b \in B$, astfel încât oricare ar fi $a \in A$,

$f(a) \neq b$.

Exemplu. Funcția $f: \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}, f(x) = x^2$ nu este surjectivă deoarece ecuația $f(x) = -5 \Leftrightarrow x^2 = -5$ nu are soluții în $\mathbf{Z}$.

Modalitate grafică de a verifica dacă o funcție numerică este sau nu surjectivă

O funcție numerică $f : A \to B$ este **surjectivă** dacă orice paralelă la axa Ox dusă prin punctele codomeniului, intersectează graficul funcției în cel puțin un punct.

Bijectivitate

Definiție. O funcție $f : A \to B$ se numește **bijectivă** dacă este injectivă și surjectivă.

Consecință. O funcție $f : A \to B$ este **bijectivă** dacă și numai dacă oricare ar fi $b \in B$, există un unic $a \in A$ astfel încât $f(a) = b$.

Exemplu. Funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = 4x - 3$ este evident atât injectivă cât și surjectivă și atunci este bijectivă.

Observație. O funcție $f : A \to B$ **nu este bijectivă** dacă nu este injectivă sau nu este surjectivă.

Exemple. Funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = x^2 - 4x + 3$ nu este injectivă, iar funcția $f: \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}, f(x) = x^2$ nu este surjectivă și atunci cele două funcții nu sunt bijective.

Modalitate grafică de a verifica dacă o funcție numerică este sau nu bijectivă

O funcție numerică $f : A \to B$ este **bijectivă** dacă orice paralelă la axa Ox dusă prin punctele codomeniului, intersectează graficul funcției într-un singur punct.

Inversabilitate

Definiție. O funcție $f : A \to B$ se numește **inversabilă** dacă există o funcție $g : B \to A$ astfel încât $gof = 1_A$ și $fog = 1_B$.

Exemplu. Funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = 2x + 1$, este inversabilă

deoarece pentru funcția $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, g(x) = \dfrac{x-1}{2}$ avem:

$(fog)(x) = f(g(x)) = f\left(\dfrac{x-1}{2}\right) = 2 \cdot \dfrac{x-1}{2} + 1 = x$ și

$(gof)(x) = g\big(f(x)\big) = g(2x+1) = \dfrac{2x+1-1}{2} = x.$

Consecință. O funcție $f : A \to B$ este **inversabilă** dacă și numai dacă este bijectivă. Inversa funcției *f* se notează cu f^{-1}.

Exemplu. Funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = x + 2$ este bijectivă deoarece este injectivă și surjectivă.

Interpretare geometrică

Graficele a două funcții inverse *f* și f^{-1} sunt simetrice față de prima bisectoare.

7.1.2 Funcția putere cu exponent natural

Definiție. Funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = x^n$, unde $n \in \mathbf{N}, n \neq 0$ se numește **funcție putere de gradul *n***.

Dacă *n* este par graficul funcției este prezentat în fig. 1, iar dacă *n* este impar graficul funcției este prezentat în fig. 2.

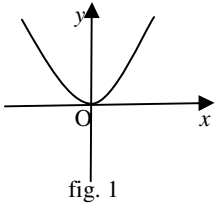


fig. 1

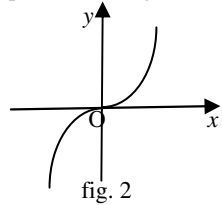


fig. 2

Observație. Reprezentarea grafică a unei astfel de funcții se face prin puncte.

7.1.3 Funcția radical

Definiție. Funcția $f: \begin{cases} [0,\infty) \to \mathbf{R}, f(x) = \sqrt[n]{x}, n \text{ par} \\ \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = \sqrt[n]{x},\ n \text{ impar} \end{cases}$ se

numește **funcție radical de ordinul *n***.

Dacă *n* este par graficul funcției este prezentat în fig. 1, iar dacă *n* este impar graficul funcției este prezentat în fig. 2.

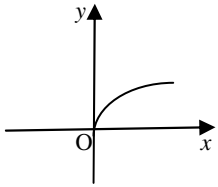


fig. 1

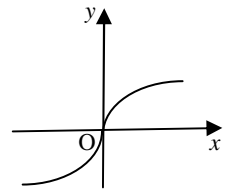


fig. 2

Observație. Reprezentarea grafică a unei astfel de funcții se face prin puncte.

7.1.4 Funcția exponențială

Definiție. Dacă $a > 0$ și $a \neq 1$, funcția $f: \mathbf{R} \to (0, \infty)$, $f(x) = a^x$ se numește **funcție exponențială**.

Observație. Funcția exponențială este bijectivă și inversabilă.

Monotonia funcției exponențiale

1) Dacă $0 < a < 1$, funcția exponențială este strict descrescătoare pe **R**.

2) Dacă $a > 1$ funcția exponențială este strict crescătoare pe **R**.

Graficul funcției exponențiale

Dacă $0 < a < 1$ graficul funcției este prezentat în fig. 1, iar dacă $a > 1$ graficul funcției este prezentat în fig. 2.

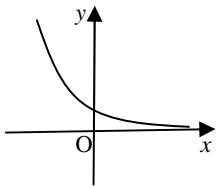


fig. 1

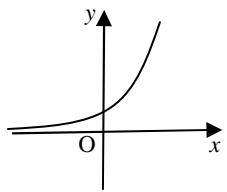


fig. 2

Observație. Reprezentarea grafică a unei astfel de funcții se face prin puncte.

7.1.5 Funcția logaritmică

Definiție. Dacă $a > 0$ și $a \neq 1$, funcția $f:(0,\infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \log_a x$ se numește **funcție logaritmică**.

Observație. Funcția logaritmică este bijectivă și deci inversabilă, inversa ei fiind funcția exponențială cu aceeași bază ca funcția logaritmică.

Monotonia funcției logaritmice

1) Dacă $0 < a < 1$, funcția logaritmică este strict descrescătoare pe $(0,\infty)$.

2) Dacă $a > 1$ funcția logaritmică este strict crescătoare pe $(0,\infty)$.

Graficul funcției logaritmice

Dacă $0 < a < 1$ graficul funcției este prezentat în fig. 1, iar dacă $a > 1$ graficul funcției este prezentat în fig. 2.

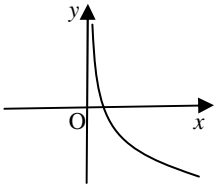


fig. 1

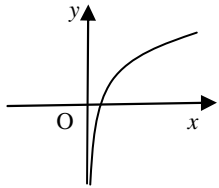


fig. 2

Observație. Reprezentarea grafică a unei astfel de funcții se face prin puncte.

7.2 Ecuații

7.2.1 Ecuații, inecuații și sisteme de ecuații iraționale

Ecuații iraționale

Orice ecuație în care necunoscuta se găsește sub unul sau mai

mulți radicali se numește **ecuație irațională**.

Înainte de rezolvarea unei ecuații iraționale se pun condițiile:

1) funcțiile de sub radicalii de ordin par să fie ≥ 0.

2) ambii membri ai ecuației trebuie să aibă același semn.

Pentru rezolvarea unei ecuații iraționale nu există o metodă generală. Prin diverse metode, ecuația trebuie transformată succesiv într-o ecuație care nu mai conține radicali și care poate fi rezolvată folosind cunoștințele acumulate.

Printre metodele folosite amintim:

a) ridicarea succesivă la putere;
b) folosirea formulelor pentru radicalii compuși;
c) folosirea proprietăților proporțiilor;
d) înmulțirea ecuației cu expresii conjugate;
e) amplificarea unor fracții cu conjugata numitorului;
f) efectuarea unor substituții.

Exemplu. Să se rezolve în **R** ecuația:

$$\sqrt{x+2}-\sqrt{2-x}=2.$$

Soluție. Punem mai întâi condițiile: $x+2\geq 0$ și $2-x\geq 0$, care prin rezolvare ne dau $x\in[-2,2]$. Trecem radicalul $-\sqrt{2-x}$ în partea dreaptă pentru a pozitiva ambii membri și obținem:

$$\sqrt{x+2}=\sqrt{2-x}+2.$$

Ridicăm la pătrat ambii membri ai ecuației și obținem:
$x+2=2-x+4+4\sqrt{2-x}\Leftrightarrow 2x-4=4\sqrt{2-x}\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x-2=2\sqrt{2-x}$. Punem condiția suplimentară $x-2\geq 0\Leftrightarrow$ $x\in[2,\infty)$. Condiția este acum $x\in[-2,2]\cap[2,\infty)=\{2\}$.
Ridicând la pătrat obținem $(x-2)^2=0\Leftrightarrow x=2$, care este soluție corectă deoarece $2\in\{2\}$.

Inecuații iraționale

Orice inecuație în care necunoscuta se găsește sub unul sau mai mulți radicali se numește **inecuație irațională**.

Înainte de rezolvarea unei inecuații iraționale se pun condițiile ca funcțiile de sub radicalii de ordin par să fie ≥ 0.

Pentru a ridica la putere pară ambii membri ai inecuației, aceștia trebuie să aibă același semn.

Pentru rezolvarea unei inecuații iraționale nu există o metodă generală. Prin diverse metode, inecuația trebuie transformată succesiv într-o inecuație care nu mai conține radicali și care poate fi rezolvată folosind cunoștințele acumulate.

Printre metodele folosite amintim:

a) ridicarea succesivă la putere;
b) folosirea formulelor pentru radicalii compuși;
c) amplificarea unor fracții cu conjugata numitorului;
d) efectuarea unor substituții.

Exemplu. Să se rezolve inecuația $x+1 \leq \sqrt{x^2+1}$.

Soluție. Evident $x^2+1 \geq 0$. Avem două cazuri:

a) $x+1 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -1 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1]$, caz în care avem: $x+1 \leq 0 \leq \sqrt{x^2+1}$ și atunci inecuația este satisfăcută de orice $x \in (-\infty, -1]$.

b) $x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -1 \Leftrightarrow x \in (-1, +\infty)$. Putem acum ridica la pătrat ambii membri ai inecuației și obținem: $x^2+2x+1 \leq x^2+1 \Leftrightarrow x \leq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0]$. Soluția inecuației este $(-1, +\infty) \cap (-\infty, 0] = (-1, 0]$.

Soluția finală este: $(-\infty, -1] \cup (-1, 0] = (-\infty, 0)$.

Sisteme de ecuații iraționale

Orice sistem de ecuații în care cel puțin o necunoscută se găsește sub unul sau mai mulți radicali se numește **sistem de ecuații iraționale**.

Înainte de rezolvarea unui sistem de ecuații iraționale se pun condițiile:

1) funcțiile de sub radicalii de ordin par trebuie să fie ≥ 0.
2) ambii membri ai ecuației trebuie să aibă același semn.

Pentru rezolvarea unui sistem de ecuații iraționale nu există o metodă generală. Prin diverse metode, sistemul de ecuații trebuie transformat succesiv într-un sistem în care măcar o ecuație nu mai conține radicali și care poate fi rezolvat folosind cunoștințele acumulate.

Printre metodele folosite amintim:

a) ridicarea succesivă la putere;
b) folosirea formulelor pentru radicalii compuși;
c) amplificarea unor fracții cu conjugata numitorului;
d) efectuarea unor substituții.

Exemplu. Să se rezolve sistemul: $\begin{cases} x+y=25 \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=7 \end{cases}$.

Soluție. Notăm $\sqrt{x}=u$ și $\sqrt{y}=v$ și obținem sistemul: $\begin{cases} u^2+v^2=25 \\ u+v=7 \end{cases}$, care prin rezolvare ne dă soluțiile: $u=3, v=4$ și $u=4, v=3$. Atunci $x=9, y=16$ sau $x=16, y=9$.

7.2.2 Ecuații, inecuații și sisteme de ecuații exponențiale

Ecuații exponențiale

Orice ecuație în care necunoscuta sau o expresie care conține necunoscuta se găsește la exponent se numește **ecuație exponențială**.

În cadrul rezolvării unei ecuații exponențiale se folosește injectivitatea funcției exponențiale: $a^{f(x)}=a^{g(x)} \Rightarrow f(x)=g(x)$.

Există câteva **categorii de ecuații exponențiale**:

1) $a>0, a\neq 1, b>0, a^{f(x)}=b \Leftrightarrow f(x)=\log_a b$.

Exemplu. Ecuația $3^x=2 \Rightarrow x=\log_3 2$.

2) $a>0, a\neq 1, a^{f(x)}=a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x)=g(x)$.

Exemplu. Ecuația $2^{x^2+1}=2^{2x} \Leftrightarrow x^2+1=2x \Leftrightarrow x=1$.

3) $a, b>0, a\neq 1, b\neq 1\ a\neq b, a^{f(x)}=b^{g(x)}$. Se logaritmează ecuația într-o bază $c>0$ și $c\neq 1$.

Exemplu. Ecuația $2^{x+1} = 3^{x-2}$ se logaritmează în baza 2 și se obține: $(x+1) = (x-2)\log_2 3 \Rightarrow x = \cdots$.

4) Ecuații în care se folosește o substituție.

Exemplu. Pentru ecuația $2^x + 4^x = 72$ se folosește substituția $2^x = y$ și ecuația devine: $y^2 + y - 72 = 0$.

Inecuații exponențiale

Orice inecuație în care necunoscuta sau o expresie care conține necunoscuta se găsește la exponent se numește **inecuație exponențială**.

Pentru rezolvarea unei inecuații exponențiale nu există o metodă generală. Prin diverse metode, inecuația trebuie transformată succesiv în una sau mai multe inecuații mai simple care pot fi rezolvate folosind cunoștințele acumulate.

În cadrul rezolvării unei inecuații exponențiale se folosește proprietatea funcției exponențiale:

a) dacă $0 < a < 1$, atunci $a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$.

b) dacă $a > 1$, atunci $a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$.

Exemplu. Pentru a rezolva inecuația $2^x + 4^x < 2$ se face substituția $2^x = y$, se obține inecuația $y^2 + y - 2 < 0$, care are soluția $y \in (-2, 1) \Leftrightarrow -2 < y < 1 \Leftrightarrow -2 < 2^x < 1$.

$2^x > -2 \Rightarrow x \in \mathbf{R}$ și $2^x < 1 \Rightarrow 2^x < 2^0 \Rightarrow x < 0$. Soluția inecuației este: $x \in \mathbf{R} \cap (-\infty, 0) = (-\infty, 0)$.

Sisteme de ecuații exponențiale

Orice sistem de ecuații în care necunoscuta sau o expresie care conține necunoscuta se găsește la exponent se numește sistem de **ecuații exponențiale**.

Pentru rezolvarea unui sistem de ecuații exponențiale nu există o metodă generală. Prin diverse metode, sistemul de ecuații trebuie transformat succesiv într-un sistem care poate fi rezolvat folosind cunoștințele acumulate.

Printre metodele folosite amintim:

a) împărțirea membru cu membru a celor două ecuații;
b) înmulțirea membru cu membru a celor două ecuații;
c) logaritmarea uneia sau ambelor ecuații;
d) efectuarea unor substituții.

Exemplu. Pentru a rezolva sistemul $\begin{cases} 3^x \cdot 4^y = 36 \\ 4^x \cdot 3^y = 48 \end{cases}$ se înmulțesc membru cu membru cele două ecuații și se obține:
$12^x \cdot 12^y = 12^3 \Rightarrow 12^{x+y} = 12^3 \Rightarrow x + y = 3 \Rightarrow y = 3 - x.$
Se înlocuiește y cu $3 - x$ și se obține o ecuație exponențială.
$3^x \cdot 4^{3-x} = 36$, cu soluția $x = 2$. Rezultă $y = 1$.

7.2.3 Ecuații, inecuații și sisteme de ecuații logaritmice

Ecuații logaritmice

Orice ecuație în care necunoscuta sau o expresie care conține necunoscuta se găsește ca bază sau argument al unui logaritm se numește **ecuație logaritmică**.

Înainte de rezolvarea unei ecuații logaritmice se pun condițiile:
1) funcțiile de sub logaritmi să fie > 0.
2) funcțiile ce reprezintă bazele logaritmilor să fie > 0 și diferite de 1.

În cadrul rezolvării unei ecuații logaritmice se folosește injectivitatea funcției logaritmice: $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x) = g(x)$.

Există câteva **categorii de ecuații logaritmice**:
1) $\log_{f(x)} g(x) = a, a \in \mathbf{R} \Rightarrow g(x) = f(x)^a$.

Exemplu. $\log_x(x^2 - 2x + 4) = 2$.
Se pun mai întâi condițiile: $x^2 - 2x + 4 > 0$ și $x > 0, x \neq 1$.
Rezultă $x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$. Ecuația devine $x^2 - 2x + 4 = x^2$,
Cu soluția $x = 2$, care este corectă deoarece $2 \in (0,1) \cup (1,+\infty)$.
2) $a > 0, a \neq 1, \log_a f(x) = \log_a g(x) \Rightarrow f(x) = g(x)$.

Exemplu. $\log_2(x^2 + x + 1) = \log_2(x^2 + 2x + 2)$.

Se pun mai întâi condițiile: $x^2+x+1>0, x^2+2x+2>0$, care după rezolvare ne dau $x \in \mathbf{R}$.
$\log_2(x^2+x+1)=\log_2(x^2+2x+2) \Rightarrow x^2+x+1=x^2+$ $+2x+2 \Rightarrow x=-1$, soluție corectă.
3) $\log_{f(x)} g(x)=\log_{g(x)} f(x)$. Se folosește formula:
$\log_{g(x)} f(x)=\dfrac{1}{\log_{f(x)} g(x)}$ și se obține ecuația:
$\log_{f(x)} g(x)=\dfrac{1}{\log_{f(x)} g(x)} \Rightarrow \log_{f(x)} g(x)=\pm 1 \Rightarrow g(x)=$
$=f(x)^{\pm 1}$.

Exemplu. $\log_{x-1}(x+1)=\log_{x+1}(x-1)$.
Se pun condițiile: $x+1>0, x-1>0, x+1\neq 1, x-1\neq 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow x>1$ și $x\neq 2$.
Se obține ecuația $x+1=(x-1)^{\pm 1}$.
a) $x+1=x-1 \Rightarrow 1=-1$, fals.
b) $x+1=\dfrac{1}{x-1} \Rightarrow x^2-1=1 \Rightarrow x^2=2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$.
Corectă este soluția $x=\sqrt{2}$.

Inecuații logaritmice

Orice inecuație în care necunoscuta sau o expresie care conține necunoscuta se găsește ca bază sau argument al unui logaritm se numește **inecuație logaritmică**.

Înainte de rezolvarea unei inecuații logaritmice se pun condițiile:
1) funcțiile de sub logaritmi să fie >0.
2) funcțiile ce reprezintă bazele logaritmilor să fie >0 și diferite de 1.

Pentru rezolvarea unei inecuații logaritmice nu există o metodă generală. Prin diverse metode, inecuația trebuie transformată succesiv în una sau mai multe inecuații mai simple care pot fi rezolvate folosind cunoștințele acumulate.

În cadrul rezolvării unei inecuații logaritmice se folosește proprietatea funcției logaritmice:

a) dacă $0 < a < 1$, atunci $\log_a f(x) < \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) > g(x)$.

b) dacă $a > 1$, atunci $\log_a f(x) < \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) < g(x)$.

Exemplu. $\log_2(x-1) > 3$. Se pune condiția $x - 1 > 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow x > 1 \Rightarrow x \in (1, \infty)$.

$\log_2(x-1) > 3 \Rightarrow \log_2(x-1) > \log_2 9 \Rightarrow x - 1 > 9 \Rightarrow x > 10$

Soluția va fi $x \in (1, \infty) \cap (10, \infty) = (10, \infty)$.

Sisteme de ecuații logaritmice

Orice sistem de ecuații în care necunoscuta sau o expresie care conține necunoscuta se găsește ca bază sau argument al unui logaritm se numește sistem de **ecuații logaritmice**.

Pentru rezolvarea unui sistem de ecuații logaritmice nu există o metodă generală. Prin diverse metode, sistemul de ecuații trebuie transformat succesiv într-un sistem care poate fi rezolvat folosind cunoștințele acumulate.

Exemplu. $\begin{cases} x + y = 5 \\ \log_2 x + \log_2 y = 2 \end{cases}$. Se pun condițiile $x > 0$, $y > 0$. A doua ecuație se scrie: $\log_2 xy = 2 \Rightarrow xy = 4$.

Rezolvând sistemul

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 4 \end{cases}$$

obținem $x = 1, y = 4$ sau $x = 4, y = 1$.

8. Metode de numărare
8.1 Mulțimi finite ordonate

Definiție. Mulțimea A se numește mulțime finită dacă $A = \emptyset$, caz în care mulțimea A are 0 elemente, sau dacă există numărul natural $n \geq 1$ și o funcție bijectivă $f : \{1, 2, \cdots, n\} \to A$.

Numărul natural n este numărul elementelor mulțimii finite și se numește cardinalul mulțimii A. Se notează $n = \text{card}(A)$, sau $n = \bar{A}$.

Exemplu. Mulțimea $A = \{a, b, c\}$ are cardinalul 3.

Proprietăți ale mulțimilor finite

1) Dacă mulțimile A și B sunt finite și există o funcție bijectivă $f : A \to B$, atunci $\bar{A} = \bar{B}$.

2) Dacă mulțimile A și B sunt finite și $A \cap B = \emptyset$, atunci mulțimea $A \cup B$ este finită și $\overline{A \cup B} = \bar{A} + \bar{B}$.

3) Dacă mulțimea A este finită și $B \subset A$ este o submulțime a sa, atunci $A - B$ este mulțime finită și $\overline{A - B} = \bar{A} - \bar{B}$.

Definiție. O mulțime finită A, împreună cu o ordine de dispunere a elementelor sale bine determinată se numește **mulțime ordonată**.

Exemplu. Fiind dată mulțimea $A = \{1, 2, 3\}$ se pot forma mulțimile ordonate $\{1, 2, 3\}, \{1, 3, 2\}, \{2, 1, 3\}, \{2, 3, 1\}, \{3, 1, 2, \}$, $\{3, 2, 1\}$. Aceste mulțimi au aceleași elemente, dar diferă prin ordinea elementelor.

Probleme de numărare importante

1) Fiind date mulțimile A și B finite, $\bar{A} = m, \bar{B} = n$, atunci numărul funcțiilor $f : A \to B$ este egal cu n^m.

2) Fiind dată mulțimea A având n elemente, atunci numărul de submulțimi ale mulțimii A este egal cu 2^n.

3) Fiind date mulțimile A și B finite, $\bar{A} = m, \bar{B} = n$, atunci mulțimea $A \times B$ este finită și $\overline{A \times B} = \bar{A} \times \bar{B}$.

8.2 Permutări

Definiție. Fiind dată mulțimea A finită, orice mulțime ordonată care se poate forma cu elementele mulțimii A se numește **permutare** a mulțimii A.

Dacă mulțimea A are n elemente, atunci numărul permutărilor mulțimii A îl notăm cu $P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n$.

Convenim ca $P_0 = 0! = 1$.

Relații de recurență. $P_n = n \cdot P_{n-1}$; $P_n = n(n-1) \cdot P_{n-2}$.

Remarcă. Fiind date mulțimile A și B având fiecare câte n elemente, atunci numărul funcțiilor bijective $f : A \to B$ este egal cu $n!$.

Exemple. a) $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

b) $\dfrac{n!}{(n-1)!} = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot (n-1) \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot (n-1)} = n$.

8.3 Aranjamente

Definiție. Fiind dată mulțimea A având n elemente, atunci submulțimile ordonate cu m elemente, $m \leq n$ ale mulțimii A se numesc aranjamente de n luate câte m.

Numărul aranjamentelor de n luate câte m se notează A_n^m și este egal cu $\dfrac{n!}{(n-m)!}$.

Observație. $A_n^0 = 1, A_n^n = n!$.

Relații de recurență. $A_n^m = n \cdot A_{n-1}^{m-1}$; $A_n^{m+1} = (n-m) \cdot A_n^m$.

Remarcă. Fiind dată mulțimea A având m elemente și mulțimea B având n elemente, $m \leq n$, atunci funcții injective $f : A \to B$ sunt în număr de A_n^m.

Exemple. a) $A_5^2 = \dfrac{5!}{(5-2)!} = \dfrac{5!}{3!} = \dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 20$.

b) Numere de 5 cifre distincte care să înceapă cu cifra 1 sunt A_9^4.

8.4 Combinări

Definiție. Fiind dată mulțimea A având n elemente, atunci

submulțimile cu m elemente, $m \leq n$ ale mulțimii A se numesc combinări de n luate câte m.

Numărul combinărilor de n luate câte m se notează C_n^m și este egal cu $\frac{n!}{(n-m)!\,m!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot m} = \frac{A_n^m}{P_m}$

Observație. $C_n^0 = 1, C_n^n = 1$.

Formula combinărilor complementare. $C_n^m = C_n^{n-m}$.

Relații de recurență.

a) $C_n^m = \frac{n}{n-m} C_{n-1}^m$

b) $C_n^m = \frac{n}{m} C_{n-1}^{m-1}$

c) $C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}$.

Remarcă. Fiind dată mulțimea A având n elemente, atunci numărul submulțimilor mulțimii A este egal cu 2^n.

Exemple. a) $C_5^3 = \frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3} = 10$.

b) $\frac{C_n^3}{C_n^2} = \frac{\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}}{\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}} = \frac{n-2}{3}$.

8.5 Binomul lui Newton

Formula binomului lui Newton

$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \cdots + C_n^k a^{n-k} b^k + \cdots + C_n^n b^n$.

Coeficienții binomiali sunt: $C_n^0, C_n^1, C_n^2, \cdots, C_n^n$.

Termenul general al binomului este: $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$.

Sume cu coeficienți binomiali cunoscute:

a) $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n$;

b) $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \cdots + (-1)^n C_n^n = 0$;

c) $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \cdots = 2^{n-1}$;

d) $C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \cdots = 2^{n-1}$.

Exemple. a) $(x+1)^4 = x^4 + C_4^1 x^3 + C_4^2 x^2 + C_4^1 x + 1 =$
$= x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1.$

b) Termenul la patrulea al dezvoltării $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^8$ este:
$T_4 = T_{3+1} = C_8^3 \left(\sqrt{2}\right)^{8-3} \sqrt{3}^3 = 56 \cdot 4\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{3} = 672\sqrt{6}.$

Aplicații

1. Să se calculeze suma următoare: $\sum\limits_{k=1}^{n} k! \cdot k$;

Soluție. $\sum\limits_{k=1}^{n} k!k = \sum\limits_{k=1}^{n} k!(k+1-1) = \sum\limits_{k=1}^{n} \left[k!(k+1) - k!\right] =$

$= \sum\limits_{k=1}^{n} \left[(k+1)! - k!\right] = (2! - 1) + ... + \left[(n+1)! - n!\right] = (n+1)! - 1.$

2. Să se rezolve ecuația $A_x^2 = 42.$

Soluție. $A_x^2 = 42 \Rightarrow x(x-1) = 42 \Rightarrow x^2 - x - 42 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = -6$ sau $x = 7$. Corespunde $x = 7$.

3. Să se determine $x, y, n \in \mathbf{N}$ dacă în dezvoltarea:

$\left(x + y\right)^n$ avem: $T_2 = 240, T_3 = 720, T_4 = 1080$.

Soluție.

$C_n^1 x^{n-1} y = 240; C_n^2 x^{n-2} y^2 = 720; C_n^3 x^{n-3} y^3 = 1080$

Împărțim membru cu membru prima relație la a doua și a doua la a treia și scoatem din fiecare relație obținută raportul: $\frac{x}{y}$;

$\frac{x}{y} = \frac{n-1}{6}, \frac{x}{y} = \frac{2n-4}{9} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{n-1}{6} = \frac{2n-4}{9} \Rightarrow$
$\Rightarrow n = 5; x = 2, y = 3.$

9. Elemente de probabilități
9.1 Evenimente. Operații cu evenimente

Evenimente

Definiție. Numim **eveniment** orice situație determinată de unul sau mai multe posibile rezultate ale unei experiențe.

Evenimentele se reprezintă în matematică ca mulțimi ce conțin probele care le realizează.

Evenimentele care pot fi realizate de o singură probă se numesc **evenimente elementare**, iar evenimentele care pot fi realizate de cel puțin două probe se numesc **evenimente compuse**.

Exemplu. Considerăm experiența aruncării unui zar. Evenimentul apariției feței cu numărul 3 este un **eveniment elementar**. Evenimentul apariției unei fețe cu număr par este evenimentul apariției unei fețe cu unul din numerele: 2 sau 4 sau 6 și este un **eveniment compus**.

Definiție. Evenimentul care nu se realizează la nici o probă a experienței se numește **eveniment imposibil**.

Definiție. Evenimentul care se realizează la fiecare efectuare a unei experiențe se numește **eveniment sigur**.

Exemplu. Considerăm experiența aruncării unui singur zar. Evenimentul obținerii unui număr mai mic decât 12 este **evenimentul sigur**, deoarece orice număr apare pe zar este mai mic decât 12. Evenimentul obținerii numărului 12 este **evenimentul imposibil**, deoarece 12 nu poate apare pe nici o față a zarului.

Definiție. Evenimentele A și B se numesc **compatibile** dacă există probe care le realizează simultan.

Evenimentele A și B se numesc **incompatibile** dacă nu există nici o probă care să le realizeze simultan

Exemplu. Considerăm experiența aruncării unui singur zar.

a) Evenimentul A al obținerii pe o față a unui număr multiplu de 3 este $A = \{3, 6\}$. Evenimentul B al obținerii pe o față a unui număr mai mic decât 4 este $B = \{1, 2, 3\}$. Cele două evenimente sunt compatibile deoarece 3 este proba care le realizează simultan.
b) Evenimentul A al obținerii pe o față a unui număr mai mic decât 3 este $A = \{1, 2\}$. Evenimentul B al obținerii pe o față a unui număr mai mare decât 4 este $B = \{5, 6\}$. Cele două evenimente sunt incompatibile deoarece nici o proba care le realizează simultan.

Operații cu evenimente

1) Reuniunea a două evenimente A și B se notează cu $A \cup B$ și este evenimentul care se realizează atunci când se realizează evenimentul A sau se realizează evenimentul B.
2) Intersecția a două evenimente A și B se notează cu $A \cap B$ și este evenimentul care realizează simultan evenimentele A și B.
3) Evenimentul contrar evenimentului A se notează A^c este evenimentul care se realizează atunci când nu se realizează evenimentul A.

Exemple. Considerăm experiența aruncării unui singur zar și evenimentele:
$A -$ evenimentul apariției unui număr par,
$B -$ evenimentul apariției unui număr mai mic decât 4
$C -$ evenimentul apariției unui număr mai mare decât 3.
Atunci avem: $A = \{2, 4, 6\}, B = \{1, 2, 3\}, C = \{4, 5, 6\}$. Evident: $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}, A \cap B = \{2\}$, iar evenimentul B este contrar evenimentului C.

9.2 Probabilitatea unui eveniment

Definiție. Numim **probabilitatea** unui eveniment raportul dintre numărul cazurilor favorabile realizării evenimentului și numărul cazurilor egal posibile.

Probabilitatea evenimentului A se notează $P(A)$.

Exemplu. Considerăm o urnă care conține 3 bile albe și 5 bile negre. Numărul cazurilor egal posibile este 8. Probabilitatea ca extrăgând o bilă din urnă aceasta să fie albă este $\frac{3}{8}$, iar probabilitatea ca bila să fie neagră este $\frac{5}{8}$.

9.3 Proprietăți ale probabilităților

1) $0 \leq P(A) \leq 1;\ P(E) = 1, P(\varnothing) = 0.$
2) $P(A^c) = 1 - P(A).$
3) Dacă A și B sunt evenimente compatibile atunci:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Exemple. a) Se aruncă două zaruri. Notăm cu A evenimentul ca 5 să nu apară și cu A^c evenimentul contrar, adică evenimentul ca 5 să apară cel puțin o dată.

$$P(A) = \left(\frac{5}{6}\right)^2 \Rightarrow P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{11}{36}.$$

b) Aruncând un zar, să calculăm probabilitatea apariției unui număr mai mic decât 4 sau a unui număr par. Notăm:
$A -$ evenimentul apariției unui număr mai mic decât 4;
$B -$ evenimentul apariției unui număr par.
Evident $A = \{1, 2, 3\}$ și $B = \{2, 4, 6\}$ și $A \cap B = \{2\}$.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{6} + \frac{3}{6} - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$

9.4 Probabilități condiționate

Definiție. Fiind date două evenimente A și B cu $P(B) > 0$, probabilitatea evenimentului A condiționată de evenimentul B (știind că s-a realizat B) este:

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Din formula de mai sus rezultă $P(A \cap B) = P(B) \cdot P_B(A)$.

Exemplu. O urnă conține 4 bile albe și 3 bile negre. Se extrag pe rând din urnă 2 bile și se pun pe masă. Determinăm probabilitatea să avem pe masă o bilă albă și una neagră în această ordine.

Notăm: A −evenimentul de a obține o bilă albă la prima extragere

B −evenimentul de a obține o bilă neagră la a doua extragere.

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{2}{7}$.

9.5 Evenimente independente

Definiție. Două evenimente A și B se numesc independente dacă $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Exemplu. Doi vânători trag simultan asupra unui lup. Probabilitatea ca primul vânător să atingă lupul este $\frac{1}{3}$ și probabilitatea ca al doilea vânător să atingă lupul este $\frac{1}{4}$. Notând cu A și B evenimentele ca primul vânător și respectiv al doilea vânător să atingă lupul, constatăm că acestea sunt independente și atunci:

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$.

9.6 Schema lui Poisson

Se consideră n urne conținând bile albe și negre, urna i conținând a_i bile albe și b_i bile negre. Se extrage din fiecare urnă câte o bilă. Notând cu $p_i, i = 1, 2, \cdots, n$ probabilitatea ca extrăgând din urna i o bilă aceasta să fie albă și $q_i = 1 - p_i$, atunci probabilitatea obținerii a k bile albe și $n - k$ bile negre este egală cu coeficientul lui x^k din dezvoltarea polinomului:

$$(p_1 x + q_1)(p_2 x + q_2) \cdot \cdots \cdot (p_n x + q_n).$$

Exemplu. Se consideră 3 urne care conțin: prima 2 bile albe și 3 bile roșii, a doua 3 bile albe și 4 bile roșii, iar a treia 4 bile albe și 5 bile roșii. Din fiecare urnă se extrage câte o bilă. Avem:

$p_1 = \frac{2}{5}, q_1 = \frac{3}{5}, p_2 = \frac{3}{7}, q_1 = \frac{4}{7}, p_1 = \frac{4}{9}, q_1 = \frac{5}{9}$. Polinomul este:

$$\left(\frac{2}{5}x + \frac{3}{5}\right)\left(\frac{3}{7}x + \frac{4}{7}\right)\left(\frac{4}{9}x + \frac{5}{9}\right).$$

Probabilitatea obținerii unei bile albe și două roșii este egală cu coeficientul lui *x* al acestui polinom. Acest coeficient este egal cu:

$$\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{5}{9} + \frac{3}{5}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{5}{9} + \frac{3}{5}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{4}{9}.$$

9.7 Schema lui Bernoulli

Schema lui Bernoulli este un caz particular al schemei lui Poisson în care urnele sunt identice. Atunci $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = p$ și $q_1 = q_2 = \cdots = q_n = q = 1 - p$. Atunci probabilitatea de a obține k bile albe și $n - k$ bile negre este egală cu coeficientul lui x^k din dezvoltarea binomului $(px + q)^n$, adică $C_n^k p^k q^{n-k}$.

Exemplu. Se aruncă de 5 ori o monedă. Probabilitatea de a obține stema este $\frac{1}{2}$, iar probabilitatea de a obține banul este $\frac{1}{2}$. Polinomul este:

$\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right)^5$. Probabilitatea de a obține de 3 ori stema și de 2 banul este egală cu coeficientul lui x^3, adică $C_5^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$.

9.8 Variabile aleatoare

Definiție. Se numește **variabilă aleatoare** o mărime care sub influența unor factori aleatori ia o mulțime finită de valori.

O variabilă aleatoare X are distribuția $X\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$, unde $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ sunt valorile posibile, iar $p_1, p_2, p_3, \cdots, p_n$ sunt probabilitățile cu care variabila *X* ia aceste valori.

Observație. $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$.

Exemplu. Variabila aleatoare care dă numărul punctelor la aruncarea unui zar este: $X\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6}\end{pmatrix}$.

Operații cu variabile aleatoare

1) Fiind date $a \in \mathbf{R}$ și $X\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n\end{pmatrix}$, atunci definim **adunarea variabilei *X* cu numărul *a***:

$$a + X\begin{pmatrix}a+x_1 & a+x_2 & \cdots & a+x_n\\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n\end{pmatrix}.$$

2) Fiind date $a \in \mathbf{R}$ și $X\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n\end{pmatrix}$, atunci definim **produsul variabilei *X* cu numărul *a***:

$$aX\begin{pmatrix}ax_1 & ax_2 & \cdots & ax_n\\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n\end{pmatrix}.$$

3) Suma variabilelor independente $X\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n\end{pmatrix}$ și $Y\begin{pmatrix}y_1 & y_2 & \cdots & y_n\\ q_1 & q_2 & \cdots & q_n\end{pmatrix}$: $X + Y\begin{pmatrix}x_1+y_1 & x_2+y_2 & \cdots & x_n+y_n\\ p_1q_1 & p_2q_2 & \cdots & p_nq_n\end{pmatrix}$.

4) Produsul variabilelor independente $X\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n\end{pmatrix}$ și $Y\begin{pmatrix}y_1 & y_2 & \cdots & y_n\\ q_1 & q_2 & \cdots & q_n\end{pmatrix}$: $XY\begin{pmatrix}x_1y_1 & x_2y_2 & \cdots & x_iy_j & \cdots & x_ny_n\\ p_1q_1 & p_1q_2 & \cdots & p_jq_j & \cdots & p_nq_n\end{pmatrix}$.

Valoarea medie a unei variabile aleatoare

Valoarea medie a variabilei aleatoare $X\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n\end{pmatrix}$ este numărul $M(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n$.

Proprietățile valorilor medii

Dacă $a \in \mathbf{R}$ și variabilele aleatoare sunt independente, atunci:

1) $M(a + X) = a + M(X)$;
2) $M(aX) = aM(X)$;
3) $M(X + Y) = M(X) + M(Y)$;
4) $M(XY) = M(X)M(Y)$.

Dispersia unei variabile aleatoare

Dispersia variabilei aleatoare $X\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$ este numărul $D^2(X) = M[(X-m)^2] = p_1(x_1-m)^2 + p_2(x_2-m)^2 + \cdots + +p_n(x_n-m)^2$, unde $m = M(X)$.
Este adevărată de asemenea formula $D^2(X) = M(X^2) - (M(X))^2$.

Proprietățile dispersiei

1) $D^2(aX) = a^2D^2(X)$;
2) $D^2(a+X) = D^2(X)$;
3) $D^2(X+Y) = D^2(X) + D^2(Y)$.

Abaterea medie pătratică a unei variabile aleatoare

Abaterea medie pătratică a unei variabile aleatoare *X* este:

$$D(X) = \sqrt{D^2(X)}.$$

10. Elemente de calcul matriceal și sisteme de ecuații liniare

10.1 Permutări

Definiție. Numim permutare de gradul n orice funcție bijectivă $\sigma: \{1, 2, \cdots, n\} \to \{1, 2, \cdots, n\}$.

Notăm cu S_n mulțimea permutărilor de gradul n.

Numărul tuturor permutărilor de gradul n este egal cu $n!$

Notăm permutarea de gradul n: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$.

Compunerea permutărilor

Fiind date permutările de gradul n, σ și τ numim compunerea lor ca fiind permutarea $\sigma\tau$ astfel încât $(\sigma\tau)(k) = \sigma(\tau(k))$ pentru orice $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$.

Proprietățile compunerii permutărilor

1) Asociativitate $-$ $(\sigma\tau)\varphi = \sigma(\tau\varphi), (\forall)\sigma, \tau, \varphi \in S_n$.

2) Element neutru $-$ $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$ este elementul neutru pentru compunerea permutărilor: $e\sigma = \sigma e$ $(\forall)\sigma \in S_n$.

3) Element invers $-$ $(\forall)\sigma \in S_n$, $(\exists)\sigma^{-1} \in S_n$ astfel încât să aibă loc relațiile: $\sigma\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma = e$.

Observație. Compunerea permutărilor nu este comutativă.

Transpoziție

Se numește **transpoziție** funcția bijectivă:

$$\tau_{i,j}: \{1, 2, \cdots, n\} \to \{1, 2, \cdots, n\}, \tau_{i,j}(k) = \begin{cases} j & dacă\ k = i \\ i & dacă\ k = j \\ k, dacă\ k \neq i, k \neq j \end{cases}.$$

Proprietățile transpoziției

1) $\tau_{i,j} = \tau_{j,i}$ **2)** ${\tau_{i,j}}^{-1} = \tau_{i,j}$ **3)** ${\tau_{i,j}}^2 = e$.

Inversiune

Fiind dată permutarea $\sigma \in S_n$, perechea $(i,j), i<j,$ unde $i,j \in \{1,2,\cdots,n\}$ se numește **inversiune** a permutării σ, dacă $\sigma(i) > \sigma(j)$.

Notăm $m(\sigma)$ numărul inversiunilor permutării σ.

Numărul $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{m(\sigma)}$ se numește semnul permutării σ.

Dacă $\varepsilon(\sigma) = 1$, permutarea σ se numește pară.

Dacă $\varepsilon(\sigma) = -1$, permutarea σ se numește impară.

Dacă $\sigma, \tau \in S_n$, atunci $\varepsilon(\sigma\tau) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)$.

10.2 Matrice

Definiție. Numim matrice de tipul (*m*, *n*) cu elemente numere complexe, o funcție $A: \{1,2,\cdots,m\} \times \{1,2,\cdots,n\} \to \mathbf{C}$.

Notăm $A(i,j) = a_{i,j}$, $i,j \in \{1,2,\cdots,m\} \times \{1,2,\cdots,n\}$ și ele se numesc **elementele** matricei.

Notăm $M_{m,n}(\mathbf{C})$ mulțimea matricelor de *m* linii și *n* coloane cu coeficienți în **C**.

Notăm $M_n(\mathbf{C})$ mulțimea matricelor de *n* linii și *n* coloane cu coeficienți în **C**.

Exemple. a) Pentru $m = n = 2$ avem: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

b) Pentru $m = 3, n = 1$ obținem matricea coloană $A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$.

c) Pentru $m = 1, n = 2$ obținem matricea linie $A = (a_{11} \quad a_{12})$.

Definiție. Două matrice $A, B \in M_{m,n}(\mathbf{C})$ sunt egale dacă are loc egalitatea $a_{ij} = b_{ij}, (\forall) i \in \{1,2,\cdots,m\}$ și $(\forall) j \in \{1,2,\cdots,n\}$.

Exemplu. Matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & x \\ x+1 & 3 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ sunt egale dacă: $1 = x, x = 1, x+1 = 2, 3 = 3 \Leftrightarrow x = 1$.

Operații cu matrice

1) Adunarea matricelor

Definiție. Fiind date $A, B \in M_{m,n}(\mathbf{C})$, numim suma matricelor A și B, matricea C ale cărei elemente sunt date de egalitățile $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, (\forall) i \in \{1, 2, \cdots, m\}$ și $(\forall) j \in \{1, 2, \cdots, n\}$.

Proprietăți ale adunării matricelor

a) Comutativitatea – $A + B = B + A$ $(\forall) A, B \in M_{m,n}(\mathbf{C})$.

b) Asociativitatea – $(A + B) + C = A + (B + C)$ $(\forall)$ $A, B, C \in \in M_{m,n}(\mathbf{C})$.

c) Elementul neutru – este matricea nulă O_{mn} deoarece:
$A + O_{mn} = O_{mn} + A, (\forall)$ $A \in M_{m,n}(\mathbf{C})$.

d) Element invers – $(\forall)$ $A \in M_{m,n}(\mathbf{C}), (\exists) A' = -A$ astfel încât $A + A' = A' + A = O_{mn}$. Matricea A' se numește opusa matricei A.

2) Înmulțirea cu scalari a matricelor

Definiție. Fiind dată matricea $A \in M_{m,n}(\mathbf{C})$ și $\alpha \in \mathbf{C}$ numim produsul dintre numărul α și matricea A, matricea B, ale cărei elemente sunt date de egalitățile $b_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$ $(\forall) i \in \{1, 2, \cdots, m\}$ și $(\forall) j \in \{1, 2, \cdots, n\}$.

Proprietăți ale înmulțirii cu scalari

a) $1 \cdot A = A, (\forall)$ $A \in M_{m,n}(\mathbf{C})$.
b) $\alpha \cdot (\beta A) = (\alpha\beta)A$, $(\forall)\alpha, \beta \in \mathbf{C}$, $A \in M_{m,n}(\mathbf{C})$.
c) $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha A + \beta A$, $(\forall)\alpha, \beta \in \mathbf{C}$, $A \in M_{m,n}(\mathbf{C})$.
d) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B, (\forall)\alpha \in \mathbf{C}$, $A, B \in M_{m,n}(\mathbf{C})$.

3) Înmulțirea matricelor

Definiție. Fiind date $A, B \in M_{m,n}(\mathbf{C})$, numim produsul matricelor A și B, matricea C ale cărei elemente sunt date de

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk} \quad (\forall) i \in \{1, 2, \cdots, m\} \text{ și } (\forall) k \in \{1, 2, \cdots, n\}.$$

Exemplu. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, atunci: $A \cdot B =$
$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \\ 3 \cdot 0 + 4 \cdot 2 & 3 \cdot 1 + 4 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 8 & 15 \end{pmatrix}$.

Proprietăți ale înmulțirii matricelor

a) Asociativitatea $-$ $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ $(\forall)\, A, B, C \in$ $\in M_{m,n}(\mathbf{C})$.

b) Elementul neutru în $M_n(\mathbf{C})$ – este matricea unitate I_n deoarece: $A \cdot I_n = I_n \cdot A, (\forall)\, A \in M_n(\mathbf{C})$, unde $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) Distributivitatea la stânga a înmulțirii față de adunarea matricelor $-$ $(\forall)\, A \in M_{m,n}(\mathbf{C})$ *și* $B, C \in M_{n,p}(\mathbf{C})$ atunci are loc egalitatea: $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$.

Transpusa unei matrice

Definiție. Fiind dată matricea $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbf{C})$, numim transpusa matricei A, matricea notată ${}^tA = (b_{kl}) \in M_{n,m}(\mathbf{C})$, unde $b_{kl} = a_{lk,}$ $(\forall)k \in \{1, 2, \cdots, n\}$ și $(\forall)l \in \{1, 2, \cdots, m\}$.

Exemplu. Fiind dată $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, atunci transpusa matricei A este matricea ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

Proprietăți ale operației de transpunere

a) $(\forall)A \in M_{m,n}(\mathbf{C})$, avem: ${}^t({}^tA) = A$.

b) $(\forall)A \in M_{m,n}(\mathbf{C})$ și $(\forall)a \in \mathbf{C}$, avem: ${}^t(a \cdot A) = a \cdot {}^tA$.

c) $(\forall)A, B \in M_{m,n}(\mathbf{C})$ avem ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$.

d) $(\forall)A \in M_{m,n}(\mathbf{C})$ și $(\forall)B \in M_{n,p}(\mathbf{C})$, are loc relația: ${}^t(A \cdot B) = {}^tB\ {}^tA$.

10.3 Determinanți

Definiție. Determinantul de ordin n este atașat matricei $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbf{C})$ și este numărul

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)}\, a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)},$$

unde S_n este mulțimea permutărilor de gradul n și $\varepsilon(\sigma)$ este semnul permutării $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$.

Particularizare

a) Pentru $n = 2$, $S_2 = \{\sigma_1, \sigma_2\}$, unde $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Evident σ_1 este permutare pară și σ_2 este permutare impară. Atunci $\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$.

b) Pentru $n = 3$, $S_3 = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6\}$, $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_5 =$
$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \sigma_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.
Avem $\varepsilon(\sigma_1) = \varepsilon(\sigma_2) = \varepsilon(\sigma_3) = 1, \varepsilon(\sigma_4) = \varepsilon(\sigma_5) = \varepsilon(\sigma_6) = -1$. Deci permutările $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sunt pare și permutările $\sigma_4, \sigma_5, \sigma_6$ sunt impare. Atunci

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} +$$
$$+ a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23}.a_{32}$$

Exemple. a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = 4 - 6 = -2$.

b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 3 \cdot 4 \cdot 8 - 3 \cdot 5 \cdot 7 -$
$-2 \cdot 4 \cdot 9 - 1 \cdot 6 \cdot 8 = 45 + 84 + 96 - 105 - 72 - 48 = 0.$

Proprietăți ale determinanților

1) $\det(A) = \det({}^tA)$;

2) Dacă adunăm la elementele unei linii(coloane) a unei matrice pătratice elementele altei linii(coloane) înmulțite cu un număr dat, atunci determinantul matricei rezultate este egal cu determinantul matricei inițiale.

3) Dacă înmulțim elementele unei linii(coloane) a unei matrice pătratice cu un număr α se obține o matrice al cărui determinant este egal cu determinantul matricei inițiale înmulțit cu α.

4) Dacă elementele unei linii(coloane) ale unei matrice pătratice au un factor comun, acest factor comun se poate scoate în fața determinantului.

5) Dacă $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbf{C})$ și $a_{ij} = b_{ij} + c_{ij}, (\forall) j \in \{1, 2 \cdots, n\}$ și *i* fixat, și dacă *B* și *C* sunt matricele obținute din *A*, înlocuind pe $a_{ij}, j \in \{1, 2 \cdots, n\}$ cu b_{ij} respectiv c_{ij}, atunci are loc relația: $\det(A) = \det(B) + \det(C)$.

6) Dacă schimbăm într-o matrice pătratică două linii(coloane) între ele, obținem o matrice al cărui determinant este egal cu opusul determinantului matricei inițiale.

7) Dacă într-o matrice pătratică două linii(coloane) sunt egale sau proporționale, atunci determinantul matricei este egal cu 0.

Dezvoltarea unui determinant după o linie sau după o coloană

Definiție. Fiind dată matricea $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbf{C})$ și d_n determinantul de ordin *n* asociat matricei *A*, numim **minorul** elementului a_{ij} și-l notăm cu M_{ij} determinantul obținut din d_n eliminând linia *i* și coloana *j*.

Notăm $d_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ și-l numim **complementul algebric** al elementului a_{ij}.

Particularizare

a) Pentru $n = 2$, folosind formula determinantului de ordinul 2 obținem $d_2 = a_{11}d_{11} + a_{12}d_{12}$, care reprezintă dezvoltarea

determinantului d_2 după linia 1. Asemănător se obțin dezvoltările determinantului d_2 după linia 2 și după coloanele 1 și 2.

b) Pentru $n = 3$, folosind formula determinantului de ordinul 3 obținem $d_3 = a_{11}d_{11} + a_{12}d_{12} + a_{13}d_{13}$, care reprezintă dezvoltarea determinantului d_3 după linia 1. Asemănător se obțin dezvoltările determinantului d_3 după liniile 2 și 3, și după coloanele 1, 2 și 3.

c) Pentru $n = 4$, asemănător obținem:

$d_4 = a_{i1}d_{i1} + a_{i2}d_{i2} + a_{i3}d_{i3} + a_{i4}d_{i4}, i = 1,2,3,4$ care reprezintă dezvoltarea determinantului d_4 după linia *i* și

$d_4 = a_{1j}d_{1j} + a_{2j}d_{2j} + a_{3j}d_{3j} + a_{4j}d_{4j}, j = 1,2,3,4$ care reprezintă dezvoltarea determinantului d_4 după coloana j**.**

Exemplu. Calculăm determinantul $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ folosind dezvoltarea după linia 2. Calculăm:

$d_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2$, $d_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -7$,

$d_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4$. Atunci:

$\Delta = a_{21}d_{21} + a_{22}d_{22} + a_{23}d_{23} = 2 \cdot 2 + 1(-7) + 1 \cdot 4 = 1.$

10.4 Matrice inversabile

Definiție. Matricea $A \in M_n(\mathbf{C})$ este inversabilă dacă $(\exists)B \in \in M_n(\mathbf{C})$ astfel încât să fie adevărate egalitățile $AB = BA = I_n$.

Matricea *B* se numește inversa matricei *A* și se notează A^{-1}.

Notăm cu A^* matricea ale cărei elemente sunt complemenții algebrici ai elementelor a_{ij} din matricea transpusă a matricei *A* și numim această matrice, adjuncta matricei *A*.

Criteriu de inversabilitate

Matricea $A \in M_n(\mathbf{C})$ este inversabilă dacă și numai dacă are determinantul nenul (*A* este nesingulară).

Formula inversei unei matrice

Fiind dată matricea $A \in M_n(\mathbf{C})$, astfel încât $\det(A) \neq 0$, atunci: $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A^*$, unde A^* este matricea adjunctă a matricei A.

Exemplu. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Atunci ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, și complementii algebrici sunt: $d_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0,$

$d_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1,$ $d_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1,$

$d_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2,$ $d_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -7,$

$d_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4,$ $d_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$

$d_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5,$ $d_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3.$

$\det(A) = 1$ și atunci: $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A^* = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -7 & 4 \\ -1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$.

10.5 Rangul unei matrice

Definiție. Fiind dată matricea $A \in M_{m,n}(\mathbf{C}), m, n \in \mathbf{N}^*$ și $r \in \mathbf{N}^*, r \leq \min(m, n)$, numim **minor de ordinul** *r*, determinantul de ordin *r* care se formează cu elementele matricii *A* situate la intersecția a *r* linii și *r* coloane.

Definiție. Matricea $A \in M_{m,n}(\mathbf{C}), m, n \in \mathbf{N}^*$ are rangul *r* dacă are un minor de ordin *r* diferit de 0 și toți minorii de ordin mai mare decât *r* (dacă există) sunt egali cu 0.

Proprietate. Fie matricea $A \in M_{m,n}(\mathbf{C}), m, n \in \mathbf{N}^*, A \neq 0_{m,n}$ și $r \in \mathbf{N}^*$. Rangul matricei *A* este egal cu *r* dacă și numai dacă

există un minor de ordinul r al matricei A, diferit de 0, iar toți minorii de ordinul $r+1$, dacă există să fie egali cu 0.

Proprietate. Fie $A, B \in M_{m,n}(\mathbf{C}), m, n \in \mathbf{N}^*$. Atunci:

$$\operatorname{rang}(AB) \leq \operatorname{rang}(A) \cdot \operatorname{rang}(B).$$

Exemplu. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Notăm $r = \operatorname{rang}(A)$. Evident $r \leq \min\{3, 4\} = 3$.

Considerăm minorul $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Calculăm acum:

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$, deoarece coloanele 1 și 3 sunt egale.

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$, deoarece coloanele 2 și 3 sunt egale.

Conform proprietății de mai sus rangul matricei A este 2.

10.6 Sisteme de ecuații liniare

Regula lui Cramer. Sistemul liniar $AX = B, A \in M_n(\mathbf{C})$, $\det(A) = d \neq 0$, are soluție unică:

$$x_1 = \frac{d_1}{d}, x_2 = \frac{d_2}{d}, \cdots, x_n = \frac{d_n}{d},$$

unde d_i este determinantul ce se obține din d înlocuind în el coloana i cu coloana termenilor liberi (coloana B).

Particularizare. Pentru $n = 3$ sistemul este:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Matricea sistemului este: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$.

Notăm $\det(A) = d$ și presupunem $d \neq 0$. Fie acum:

$$d_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad d_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$d_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Soluţiile sistemului sunt: $x_1 = \frac{d_1}{d}, x_2 = \frac{d_2}{d}, x_3 = \frac{d_3}{d}$.

Definiție. Se consideră sistemul de ecuații liniare $AX = B$, și $\text{rang}(A) = r$. Orice minor de ordinul r al matricei A, diferit de 0 se numește **minor principal**.

Necunoscutele sistemului care corespund minorului principal se numesc **necunoscute principale**, celelalte se numesc **necunoscute secundare**.

Ecuațiile sistemului care corespund minorului principal se numesc **ecuații principale**, celelalte se numesc **ecuații secundare**.

Definiție. Un sistem de ecuații liniare $AX = B$, este **incompatibil** dacă nu are nici o soluție.

Definiție. Un sistem de ecuații liniare $AX = B$, este **compatibil** dacă are cel puțin o soluție. Dacă sistemul are o soluție se numește **compatibil determinat**, iar dacă are mai multe soluții se numește **compatibil nedeterminat**.

Definiție. Fiind dat un sistem de ecuații liniare $AX = B$, matricea formată din elementele matricei A în ordinea normală și ca ultimă coloană, coloana termenilor liberi se numește matricea extinsă a matricei A și se notează cu $\bar{A}$.

Definiție. Numim **minor caracteristic** orice minor de ordin $r + 1$ obținut prin bordarea unui minor principal cu elementele corespunzătoare ale coloanei termenilor liberi și cu cele ale uneia dintre liniile rămase.

Teorema Kronecker-Capelli. Un sistem de ecuații liniare $AX = B$ este compatibil dacă și numai dacă $\text{rang}(A) = \text{rang}(\bar{A})$.

Exemplu. Considerăm sistemul: $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x + y + z = 7 \\ 3x - y + 2z = 7 \end{cases}$.

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ și $\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 7 \\ 3 & -1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$.

$\det(A) = -1 \Rightarrow \text{rang}(A) = 3 \Rightarrow \text{rang}(\bar{A}) = 3$.

Teorema lui Rouche. Un sistem de ecuații liniare $AX = B$ este compatibil dacă și numai dacă toți minorii caracteristici sunt egali cu 0.

Algoritm de rezolvare a unui sistem de *m* ecuații liniare cu *n* necunoscute

a) Se calculează rangul sistemului *r*.

b) Dacă $r = m$, atunci sistemul este compatibil

- Dacă $r = n$, atunci sistemul este compatibil determinat
- Dacă $r < n$, atunci sistemul este compatibil nedeterminat

c) Dacă $r < m$, avem:

- Dacă toți minorii caracteristici sunt nuli atunci sistemul este compatibil

-Dacă $r = n$, atunci sistemul este compatibil determinat

-Dacă $r < n$, atunci sistemul este compatibil nedeterminat

-Dacă cel puțin unul dintre minorii caracteristici este diferit de 0, atunci sistemul este incompatibil.

Exemplu. Fie sistemul $\begin{cases} ax + y + z = 4 \\ x + y + z = 3 \\ x + 2y + z = 4 \end{cases}$, $a \in \mathbf{R}$.

Fie $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ matricea sistemului, $\det(A) = 1 - a$.

Dacă $\det(A) = 1 - a \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 1$, atunci $r = 3$ și avem:

$r = m = n = 3$ şi deci sistemul este compatibil determinat şi se rezolvă prin regula lui Cramer.
Dacă $\det(A) = 1 - a = 0 \Leftrightarrow a = 1$, atunci $r < 3$. Alegem
$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ ca determinant principal şi atunci $r = 2$.
Avem $r < m = 3$ şi calculăm minorul caracteristic(există numai unul) şi anume: $\Delta_{car} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ şi atunci sistemul este incompatibil.

Sisteme omogene de *m* ecuaţii liniare cu *n* necunoscute

1. Orice sistem liniar de *m* ecuaţii cu *n* necunoscute este compatibil, având ca soluţie soluţia banală sau soluţia 0

2. Un sistem liniar de *m* ecuaţii cu *n* necunoscute are şi alte soluţii în afară de soluţia banală sau soluţia 0 dacă $r < m$.

11. Structuri algebrice

11.1 Legi de compoziție

Definiție. Fiind dată o mulțime nevidă **M**, numim lege de compoziție pe mulțimea M, o funcție $\varphi: \mathbf{M} \times \mathbf{M} \to \mathbf{M}$.

Legea de compoziție se notează cu diverse simboluri: $+, \cdot, *$, $\circ, \perp, \cdots$ și atunci se folosește una din notații $\varphi(x, y) = x + y$, $\varphi(x, y) = x \cdot y, \varphi(x, y) = x * y, \cdots$.

Exemple. a) Operația de adunare „+" pe mulțimile $\mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$.
b) Operația de înmulțire „·" pe mulțimile $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$.
c) Operațiile de adunare și înmulțire pe mulțimea matricelor $M_n(\mathbf{C})$.

Definiție. Fie **M** o mulțime nevidă și $\varphi: \mathbf{M} \times \mathbf{M} \to \mathbf{M}$ o lege de compoziție pe **M**. O submulțime nevidă $\mathbf{S} \subset \mathbf{M}$ se numește **parte stabilă** a lui **M** în raport cu legea φ, dacă oricare ar fi $x, y \in \mathbf{S}$, rezultă $\varphi(x, y) \in \mathbf{S}$.

Exemple. a) Mulțimile de numere **N**, **Z**, **Q** sunt părți stabile ale lui **R** în raport cu operația de adunare și în raport cu operația de înmulțire.
b) Dacă **A** este o mulțime nevidă, atunci mulțimea funcțiilor: $F_{inj} = \{f: \mathbf{A} \to \mathbf{A}, f \text{ este injectivă}\}$ este parte stabilă a mulțimii $F_{\mathbf{A}} = \{f: \mathbf{A} \to \mathbf{A}\}$ în raport cu compunerea funcțiilor, deoarece compunerea a două funcții injective este tot funcție injectivă.

Aplicații

1. Să se arate în fiecare din următoarele cazuri că mulțimea M este parte stabilă a mulțimii E în raport cu legea de compoziție specificată:

a) $\mathrm{M} = (-1, 0)$, $\mathrm{E} = \mathbf{R}$, $x * y = xy + x + y$;

b)) $\mathrm{M} = (1, 2)$, $\mathrm{E} = \mathbf{R}$, $x * y = \dfrac{3xy - 4x - 4y + 6}{2xy - 3x - 3y + 5}$.

Soluție. Se arate că $(\forall)x, y \in \mathrm{M}$ rezultă $x * y \in \mathrm{M}$.

a) $x, y \in (-1,0) \Rightarrow x+1>0, y+1>0, x<0, y<0.$

Se demonstrează: $-1 < x * y < 0 \Leftrightarrow -1 < xy + x + y < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+1)(y+1) > 0$ și $x(y+1) + y < 0$, adevărate.

b) $x, y, \in (1, 2) \Rightarrow x = 1 + a$, $y = 1 + b$ unde $a, b \in (0,1)$.

$$x * y = (1+a) * (1+b) = ... = \frac{3ab - a - b + 1}{2ab - a - b + 1}$$

$$x * y > 1 \Leftrightarrow \frac{3ab - a - b + 1}{2ab - a - b + 1} > 1 \Leftrightarrow \frac{ab}{ab + (1-a)(1-b)} > 0$$

$$x * y < 2 \Leftrightarrow \frac{(1-a)\cdot(1-b)}{ab + (1-a)(1-b)} > 0$$

adevărată oricare ar fi $a, b \in (0,1)$.

Proprietăți

1) Asociativitatea

O lege de compoziție notată $*: \mathbf{M} \times \mathbf{M} \to \mathbf{M}$ se numește **asociativă** dacă $(\forall)x, y, z \in \mathbf{M}$ avem: $(x * y) * z = x * (y * z)$.

Exemple de legi asociative.

a) Adunarea pe mulțimile de numere $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$ este **asociativă** deoarece: $(x + y) + z = x + (y + z)$ pentru orice x, y, z în fiecare din mulțimile din enunț.

b) Înmulțirea pe mulțimile de numere $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$ este **asociativă** deoarece: $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ pentru orice x, y, z în fiecare din mulțimile din enunț.

c) Adunarea matricelor pe mulțimea $M_n(\mathbf{C})$ este **asociativă** deoarece: $(A + B) + C = A + (B + C), (\forall)A, B, C \in M_n(\mathbf{C})$.

d) Înmulțirea matricelor pe mulțimea $M_n(\mathbf{C})$ este **asociativă** deoarece: $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C), (\forall)A, B, C \in M_n(\mathbf{C})$.

e) Compunerea funcțiilor pe mulțimea $F_{\mathbf{A}} = \{f: \mathbf{A} \to \mathbf{A}\}$ este **asociativă** deoarece $(fog)oh = fo(goh), (\forall)f, g, h \in F_A$.

Exemple de legi care nu sunt asociative

a) Scăderea pe mulțimile **Z**, **Q**, **R**, **C**, **nu este asociativă** deoarece: $(4-2)-5 \neq 4-(2-5)$.

b) Scăderea matricelor pe mulțimea $M_n(\mathbf{C})$ **nu este asociativă** deoarece: $\left(\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}\right)-\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix} \neq$

$\neq \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}-\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}\right)$.

2) Comutativitatea

O lege de compoziție notată $*: \mathbf{M}\times\mathbf{M}\to\mathbf{M}$ se numește **comutativă** dacă $(\forall)x, y \in \mathbf{M}$ avem: $x * y = y * x$.

Exemple de legi comutative

a) Adunarea pe mulțimile de numere **N**, **Z**, **Q**, **R**, **C** este **comutativă** deoarece: $x + y = y + x$ pentru orice x, y în fiecare din mulțimile din enunț.

b) Înmulțirea pe mulțimile de numere **N**, **Z**, **Q**, **R**, **C** este **comutativă** deoarece: $x \cdot y = y \cdot x$ pentru orice x, y în fiecare din mulțimile din enunț.

c) Adunarea matricelor pe mulțimea $M_n(\mathbf{C})$ este **comutativă** deoarece: $A + B = B + A, (\forall)A, B \in M_n(\mathbf{C})$.

Exemple de legi care nu sunt comutative

a) Scăderea pe mulțimile **Z**, **Q**, **R**, **C**, **nu este comutativă** deoarece: $5-3 \neq 3-5$.

b) Scăderea matricelor pe mulțimea $M_n(\mathbf{C})$ **nu este comutativă** deoarece: $\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\end{pmatrix}$.

c) Compunerea funcțiilor pe mulțimea $F_{\mathbf{A}} = \{f: \mathbf{A}\to\mathbf{A}\}$ **nu este comutativă** deoarece fiind date funcțiile $f, g: \mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x) = x+1, g(x) = x^2, (fog)(x) = x^2+1$ și $(gof)(x) = (x+1)^2$.

3) Element neutru

O lege de compoziție notată $*: \mathbf{M}\times\mathbf{M}\to\mathbf{M}$ admite **element neutru** dacă $(\exists)\, e \in \mathbf{M}$ astfel încât să avem : $x * e = e * x =$

$= x\ (\forall)x \in M$.

Exemple de legi care admit element neutru

a) Numărul 0 este **element neutru** în raport cu adunarea numerelor întregi, raționale, reale.

b) Numărul 1 este **element neutru** în raport cu înmulțirea numerelor întregi, raționale, reale.

c) Matricea $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ este **element neutru** în raport cu adunarea matricelor din $M_2(\mathbf{R})$.

d) Aplicația identică 1_A a mulțimii A este element neutru în raport cu compunerea funcțiilor din $F_{\mathbf{A}}$.

Exemple de legi care nu admit element neutru

a) Mulțimea numerelor naturale pare $\{2k \mid k \in \mathbf{N}\}$ este parte stabilă a lui **N** în raport cu înmulțirea și legea indusă de înmulțire pe această mulțime nu admite element neutru. Într-adevăr dacă ar exista $e \in \{2k \mid k \in \mathbf{N}\}$ încât $xe = ex = x\ (\forall)x \in \{2k \mid k \in \mathbf{N}\}$, atunci $e = 2k = 1$ cu $k \in \mathbf{N}$, ceea ce nu se poate.

4) Elemente simetrizabile

Fie $\mathbf{M}$ o mulțime nevidă și o lege de compoziție notată $*: \mathbf{M} \times \mathbf{M} \to \mathbf{M}$ care admite element neutru. Un element $x \in \mathbf{M}$ se numește simetrizabil în raport cu legea de compoziție $*$ dacă $(\exists)\ x' \in \mathbf{M}$ astfel încât să avem : $x * x' = x' * x = e$. Elementul x' se numește simetricul elementului x față de legea de compoziție $*$.

Observație. Dacă legea de compoziție $*$ este în plus și asociativă, atunci simetricul unui element x dacă există este unic.

Teoremă. Fie $\mathbf{M}$ o mulțime nevidă și o lege de compoziție notată multiplicativ $\cdot : \mathbf{M} \times \mathbf{M} \to \mathbf{M}$ care este asociativă și care admite element neutru.

a) Dacă $e \in \mathbf{M}$ admite element neutru, atunci $e^{-1} = e$.

b) Dacă $x \in \mathbf{M}$ este inversabil, atunci și x^{-1} este inversabil și are loc relația: $(x^{-1})^{-1} = x$.

c) Dacă $x, y \in \mathbf{M}$ sunt inversabile, atunci și xy este inversabil și are loc relația: $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$.

Exemple de elemente simetrizabile în raport cu o lege de compoziție

a) Orice x întreg, rațional, real sau complex este simetrizabil în raport cu adunarea și admite ca simetric pe $-x$.

b) Orice $x \neq 0$ rațional sau real este simetrizabil în raport cu înmulțirea și admite ca simetric pe $\frac{1}{x}$.

c) Orice matrice $A \in M_{m,n}(\mathbf{C})$ este simetrizabilă în raport cu adunarea matricelor și admite ca simetric pe $-A$.

Exemple de elemente care nu sunt simetrizabile în raport cu o lege de compoziție

a) Orice $x \in \mathbf{N}^*$ nu este simetrizabil în raport cu adunarea deoarece $-x \notin \mathbf{N}$.

b) Orice $x \in \mathbf{Z}^*$ nu este simetrizabil în raport cu înmulțirea deoarece $\frac{1}{x} \notin \mathbf{Z}$.

Aplicații

1. Fie legea de compoziție definită pe **R** prin:

$$x * y = axy - b \cdot (x + y) + c;\ a, b, c \in \mathbf{R}$$

Să se determine relația ce există între *a*, *b*, *c* astfel încât legea de compoziție să fie asociativă.

Soluție. $x * (y * z) = (x * y) * z \quad (\forall)\ x, y, z \in \mathbf{R} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow a^2xyz - ab \cdot (xy + xz + yz) + (ac - b) \cdot x + b^2(y + z) -$$

$$-bc + c = a^2xyz - ab \cdot (xy + xz + yz) + (ac - b) \cdot z +$$

$$+b^2(x + y) - bc + c \Leftrightarrow (ac - b - b^2) \cdot (x - z) = 0$$

$$(\forall)\ x, z \in R \Leftrightarrow ac - b - b^2 = 0 \Leftrightarrow b^2 + b = ac$$

11.2 Grupuri

1. Semigrupuri. Monoizi

Definiție. Fiind dată o mulțime nevidă $\mathbf{S}$ pe care s-a definit o lege de compoziție $*: \mathbf{S} \times \mathbf{S} \to \mathbf{S}$, atunci perechea $(\mathbf{S},*)$ se numește **semigrup** dacă legea $*$ este asociativă.

Dacă legea $*$ este în plus și comutativă, atunci semigrupul se numește **comutativ**.

Definiție. Semigrupul $(\mathbf{M},*)$ se numește **monoid** dacă legea de compoziție $*$ admite și element neutru.

Dacă legea $*$ este în plus și comutativă, atunci **monoidul** se numește **comutativ** sau **abelian**.

2. Grupuri

Definiție. Fiind dată o mulțime nevidă $\mathbf{G}$ pe care s-a definit o lege de compoziție $*: \mathbf{G} \times \mathbf{G} \to \mathbf{G}$, atunci perechea $(\mathbf{G},*)$ se numește **grup** dacă:

a) $*$ este asociativă, adică $(x * y) * z = x * (y * z)$ $(\forall) x, y, z \in \mathbf{G}$.

b) există element neutru în raport cu $\mathbf{G}$, adică $(\exists)$ $e \in \mathbf{G}$ astfel încât să avem : $x * e = e * x = x$ $(\forall) x \in \mathbf{G}$.

c) orice element din $\mathbf{G}$ este simetrizabil în raport cu $*$, adică $(\forall) x \in \mathbf{G}, (\exists)$ $x' \in \mathbf{G}$ astfel încât : $x * x' = x' * x = e$.

Dacă în plus $*$ este comutativă, adică: $x * y = y * x$ $(\forall) x, y \in \in \mathbf{G}$, atunci grupul se numește **comutativ** sau **abelian**.

Exemple. a) $(\mathbf{Q}, +)$, adică mulțimea numerelor raționale împreună cu operația de adunare determină un grup abelian. Elementul neutru este 0 și pentru orice $x \in \mathbf{Z}$, $-x$ este opusul lui x.

b) $(\mathbf{M_n}(\mathbf{R}), +)$, adică mulțimea matricelor de n linii și n coloane cu coeficienți în $\mathbf{R}$ determină împreună cu adunarea un grup comutativ.

Reguli de calcul într-un grup. Fie $(\mathbf{G}, \cdot)$ un grup, $a, b, c \in \mathbf{G}$ și $m, n \in \mathbf{Z}$. Atunci avem:

a) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;
b) $(a^m)^n = a^{mn}$;
c) $(a^m)^{-1} = (a^{-1})^m$;
d) $a \cdot b = a \cdot c \Rightarrow b = c$ – simplificarea la stânga;
e) $b \cdot a = c \cdot a \Rightarrow b = c$ – simplificarea la dreapta.

Aplicații

1. Să se demonstreze că mulțimea **G** are o structură algebrică de grup față de legea de compoziție specificată.

$$\mathbf{G} = (1, +\infty); x * y = \sqrt{x^2y^2 - x^2 - y^2 + 2};$$

Soluție. $(x * y) * z = x * (y * z) =$

$= \sqrt{x^2y^2z^2 + x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 + x^2 + y^2 + z^2}$;

$x * e = x \Rightarrow \sqrt{x^2e^2 - x^2 - e^2 + 2} = x \Rightarrow e^2 = 2 \Rightarrow e = \sqrt{2}$;

$x * x' = e \Rightarrow \sqrt{x^2x'^2 - x^2 - x'^2 + 2} = \sqrt{2} \Rightarrow x' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

2. Să se demonstreze că mulțimea **G** are o structură algebrică de grup față de legea de compoziție specificată.

$$\mathbf{G} = (-1, 1); x * y = \frac{x + y}{1 + xy}.$$

Soluție. $(x * y) * z = x * (y * z) = \dfrac{x+y+z+xyz}{1+xy+yz+zx}$

$x * e = x \Rightarrow \dfrac{x + e}{1 + xe} = x \Rightarrow e = 0$;

$x * x' = e \Rightarrow \dfrac{x + x'}{1 + xx'} = 0 \Rightarrow x' = -x$.

3. Să se demonstreze că mulțimea **G** împreună cu înmulțirea matricelor determină o structură algebrică de grup față de legea de compoziție specificată.

$$\mathbf{G} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, x \in \mathbf{Z} \right\}.$$

Soluție. Înmulțirea matricelor este asociativă.

$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & e \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & x+e \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow e = 0.$

Elementul neutru este matricea $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & x' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow x' = -x.$ Atunci matricea inversabilă a matricei $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ este $\begin{pmatrix} 1 & -x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Să se arate că grupul (**G**, ·) este abelian dacă și numai dacă: $(xy)' = x'y' (\forall) x, y \in \mathbf{G}$, unde x', y' sunt simetricele lui x, y.

Soluție. $(xy)' = x'y' \Rightarrow y'x' = x'y' \Rightarrow x' = yx'y' \Rightarrow$

$e = xyx'y' \Rightarrow y = xyx' \Rightarrow yx = xy$ **.**

5. Fie (**G**, ·) un grup și $a, b \in \mathbf{G}$ care verifică relațiile $a^2 = b^2 = (ab)^2$. Să se arate că $b^3 = ab^3a$.

Soluție. $a^2 = (ab)^2 \Rightarrow a^2 = ab \cdot ab \Rightarrow a = bab$ (1)

$$b^2 = (ab)^2 \Rightarrow b^2 = ab \cdot ab \Rightarrow b = aba \quad (2)$$

(1) și (2) $\Rightarrow ab = bab \cdot aba = b \cdot aba \cdot ba = b \cdot b \cdot ba = b^3a \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2b = ab^3a \Rightarrow b^2 \cdot b = ab^3a \Rightarrow b^3 = ab^3a.$

6. Fie (**G**, ·) un grup și $a, b \in \mathbf{G}$ care verifică relațiile $a^4 = b^4 = e$ și $ab = ba^2$. Să se arate că:

a) $a = e$ b) $b^2a^3 = (ba)^2$.

Soluție. a) $ab^2 = ab \cdot b = ba^2 \cdot b = ba \cdot ab \;\; ba \cdot ba^2 = b \cdot ab \cdot a^2 =$

$=b\cdot ba^2\cdot a^2 = b^2\cdot a^4 = b^2 \Rightarrow ab^2 = b^2 \Rightarrow a = e$.
b) $b^2a^3 = b\cdot ba^2\cdot a = b\cdot ab\cdot a = ba\cdot ba = (ba)^2$.

3. Subgrup al unui grup

Definiție. Fie $(\mathbf{G},*)$ un grup. O submulțime nevidă $\mathbf{H} \subset \mathbf{G}$ se numește **subgrup** al lui **G**, dacă sunt verificate următoarele condiții:

a) $(\forall)x, y \in \mathbf{H} \Rightarrow x * y \in \mathbf{H}$.
b) $(\forall)x \in \mathbf{H} \Rightarrow x^{-1} \in \mathbf{H}$.

Propoziție. Fie $(\mathbf{G},*)$ un grup și $\mathbf{H} \subset \mathbf{G}$ o submulțime nevidă. Atunci **H** este **subgrup** al lui **G** dacă și numai dacă oricare ar fi $x, y \in \mathbf{H}$ avem $x^{-1}y \in \mathbf{H}$.

Teoremă. Fie $(\mathbf{G},*)$ un grup, e elementul neutru al lui **G** și **H** un subgrup al lui **G**. Atunci avem:

a) $e \in \mathbf{H}$.
b) $(\mathbf{H},*)$ este subgrup.

Exemple de subgrupuri.

1) Fiind dat $(\mathbf{G},*)$ un grup atunci $\mathbf{H} = \{e\}$ și $\mathbf{H} = \mathbf{G}$ sunt subgrupuri ale lui **G.**

2) Fiind dat $(\mathbf{G},*)$ un grup și $a \in \mathbf{G}$, atunci $< a >= \{x^n \mid n \in \mathbf{Z}\}$ este subgrup al lui **G,** deoarece $a^m \cdot a^n = a^{m+n} \in < a >$ și $(a^m)^{-1} = (a^{-1})^m \in < a >$.

Subgrupul $< a >$ se numește subgrupul ciclic generat de elementul $a \in \mathbf{G}$.

Aplicații

1. a) Să se arate că mulțimea $\mathrm{Z_k} = \left\{ kx \middle| x \in \mathrm{Z} \right\}$ formează un subgrup al grupului (**Z**, +).
b) $\mathbf{Z}_3 \cap \mathbf{Z}_5 = \mathbf{Z}_{15}$.

Soluție. a) este evident.

b) $x \in \mathbf{Z}_3 \cap \mathbf{Z}_5 \Rightarrow x = 3k = 5l \Rightarrow k$ se divide prin 5 $\Rightarrow k = 5n$ și atunci $x = 3k = 15n \in \mathbf{Z_{15}} \Rightarrow \mathbf{Z_3} \cap \mathbf{Z_5} \subseteq \mathbf{Z_{15}}$

$x \in \mathbf{Z_{15}} \Rightarrow x = 15k = 5 \cdot (3k) \in \mathbf{Z_5}, x = 3 \cdot (5k) \in \mathbf{Z_3} \Rightarrow$

$x \in \mathbf{Z_3} \cap \mathbf{Z_5} \Rightarrow \mathbf{Z_{15}} \subseteq \mathbf{Z_3} \cap \mathbf{Z_5}$.

2. Să se arate că $\mathbf{H} = \left\{ A \in M_2(\mathbf{Z}) \middle| A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & a \end{pmatrix} \right\}$ este subgrup al grupului $\mathbf{M_2(Z)}$**,** în raport cu adunarea matricelor**.**

Soluție. a) Fie $A, B \in \mathbf{H} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & a \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & b \end{pmatrix} \Rightarrow$ $\Rightarrow A + B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a+b & a+b \end{pmatrix} \in \mathbf{H}$ și $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -a & -a \end{pmatrix} \in \mathbf{H}$.

4. Morfisme și izomorfisme de grupuri

Definiție. Fiind date grupurile $(\mathbf{G},*)$ și $(\mathbf{G}', \mathrm{o})$, se numește **morfism** de grupuri funcția $f : \mathbf{G} \to \mathbf{G}'$, care are proprietatea:

$$f(x * y) = f(x) \mathrm{o} f(y)\ (\forall) x, y \in \mathbf{G}.$$

Definiție. Fiind date grupurile $(\mathbf{G},*)$ și $(\mathbf{G}', \mathrm{o})$, se numește **izomorfism** de grupuri funcția $f : \mathbf{G} \to \mathbf{G'}$, care are proprietățile:
a) f este bijectivă;
b) $f(x * y) = f(x) \mathrm{o} f(y)\ (\forall) x, y \in \mathbf{G}$.

Propoziție. Fiind date grupurile $(\mathbf{G},*)$ și $(\mathbf{G}', \mathrm{o})$, având elementele neutre $e_1 \in \mathbf{G}$ și $e_2 \in \mathbf{G}'$ și $f : \mathbf{G} \to \mathbf{G}'$ un morfism de grupuri, atunci avem:

a) $f(e_1) = e_2$;

b) $f(x') = (f(x))'\ (\forall) x \in \mathbf{G}$, unde x' este simetricul lui x, iar $(f(x))'$ este simetricul lui $f(x)$.

Aplicații

1. Să se arate că:

a) înmulțirea matricelor determină pe $\left\{\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| k \in \mathbf{Z}\right\}$ o structură de grup;

b) grupul definit la punctul a) este izomorf cu grupul aditiv al numerelor întregi.

Soluție. a) Se verifică cu ușurință axiomele grupului.

b) Se definește $f\left(\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = k$.

2. Să se arate că:

a) $x * y = x + y - 2$ determină pe $\mathbf{Z}$ o structură de grup abelian;

b) $x \circ y = x + y - 1$ determină pe $\mathbf{Z}$ o structură de grup abelian;

c) între grupurile de la a) și b) există un izomorfism de forma $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}, f(x) = x + a, a \in \mathbf{R}$.

Soluție. a) și b) Se verifică cu ușurință axiomele grupului.

c) Elementul neutru al grupului de la a) este 2 și al grupului de la b) este –1. Atunci $f(2) = -1 \Rightarrow 2 + a = -1 \Rightarrow a = -3$ și atunci $f(x) = x - 3$.

11.3 Inele

1) Definiția inelului

Definiție. O mulțime nevidă $\mathbf{A}$ luată împreună cu două legi de compoziție una notată aditiv „+" și alta notată multiplicativ „· " se numește **inel** dacă:

a) $(\mathbf{A}, +)$ este **grup abelian**;

b) $(\mathbf{A}, \cdot)$ este **monoid**;

c) înmulțirea este **distributivă** față de adunare, adică:

$x(y+z) = xy + xz, (y+z)x = yx + zx \quad (\forall) x, y, z \in \mathbf{A}$.

Dacă în plus legea de compoziție notată multiplicativ este comutativă, atunci inelul se numește comutativ.

Exemple. a) $(\mathbf{Z}, +, \cdot)$, adică mulțimea numerelor întregi împreună cu adunarea și înmulțirea determină o structură de inel. Elementul neutru față de adunare este 0, elementul neutru față de înmulțire este 1, orice $x \in \mathbf{Z}$ are ca opus pe $-x$.

b) $(\mathbf{M_n}(\mathbf{R}), +, \cdot), n \geq 2$, adică mulțimea matricelor de n linii și n coloane cu coeficienți în $\mathbf{R}$ determină împreună cu adunarea și înmulțirea un inel necomutativ, având elementul neutru față de adunare matricea 0_n și elementul neutru față de înmulțire matricea unitate I_n.

Definiție. Fie $(\mathbf{A}, +, \cdot)$ un inel. O submulțime nevidă **S** a lui **A** se numește subinel al lui **A** dacă au loc următoarele:

a) $(\forall) x, y \in \mathbf{S} \Rightarrow x - y \in \mathbf{S}$;

b) $(\forall) x, y \in \mathbf{S} \Rightarrow xy \in \mathbf{S}$;

c) $1 \in \mathbf{S}$.

Exemple. a) Fiind dat un inel $(\mathbf{A}, +, \cdot)$, evident **A** este un subinel al său.

b) $(\mathbf{Z}, +, \cdot)$ este subinel al inelului $(\mathbf{Q}, +, \cdot)$.

Definiție. Fie $(\mathbf{A}, +, \cdot)$ un inel și $a \in \mathbf{A}, a \neq 0$. Spunem că a este divizor al lui 0 la stânga (respectiv la dreapta) dacă există $b \in \mathbf{A}, b \neq 0$, astfel încât $ab = 0$ (respectiv $ba = 0$).

Un element $a \in \mathbf{A}$, care este atât divizor la stânga cât și la dreapta al lui 0 se numește divizor al lui 0.

Exemple. Inelul $(\mathbf{Z_6}, +, \cdot)$ are divizori ai lui 0 deoarece $\hat{2} \neq \hat{0}$ $\hat{3} \neq \hat{0}$ și $\hat{2} \cdot \hat{3} = \hat{0}$.

Definiție. Spunem că inelul $(\mathbf{A}, +, \cdot)$ este fără divizori ai lui 0 dacă $(\forall) x, y \in \mathbf{A}, x \neq 0, y \neq 0 \Rightarrow xy \neq 0$.

Exemplu. Inelul $(\mathbf{Z}, +, \cdot)$ nu are divizori ai lui 0 deoarece $x \neq 0, y \neq 0 \Rightarrow xy \neq 0$.

Definiție. Un inel comutativ cu cel puțin două elemente și fără divizori ai lui 0 se numește **domeniu de integritate**.

2) Reguli de calcul într-un inel

1) Într-un inel $(\mathbf{A}, +, \cdot)$ cu cel puțin două elemente avem: $1 \neq 0$.
2) Pentru orice $x \in \mathbf{A}$, avem: $x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$.
3) Pentru orice $x, y \in \mathbf{A}$, avem:
$(-x)(-y) = xy$ și
$(-x)y = x(-y) = -xy$.
4) Pentru orice $x, y, z \in \mathbf{A}$ avem:
$x(y - z) = xy - xz$ și $(y - z)x = yx - zx$.
5) Într-un inel $(\mathbf{A}, +, \cdot)$ fără divizori ai lui 0, dacă $x \neq 0$, atunci:
$xy = xz \Rightarrow y = z$ și $yx = zx \Rightarrow y = z$.

3. Morfisme și izomorfisme de inele

Definiție. Fiind date inelele $(\mathbf{A}, +, \cdot)$ și $(\mathbf{A}', *, \circ)$, se numește **morfism** de inele funcția $f : \mathbf{A} \to \mathbf{A}'$, care îndeplinește proprietățile:
1) $f(x + y) = f(x) * f(y)$ $(\forall) x, y \in \mathbf{A}$;
2) $f(x \cdot y) = f(x) \circ f(y)$ $(\forall) x, y \in \mathbf{A}$;
3) $f(e.) = e_{\circ}$, unde $e.$ și $e_{\circ}$ sunt elementele neutre în raport cu operațiile multiplicative din cele două inele.

Definiție. Fiind date inelele $(\mathbf{A}, +, \cdot)$ și $(\mathbf{A}', *, \circ)$, se numește **izomorfism** de inele funcția $f : \mathbf{A} \to \mathbf{A}'$, care îndeplinește proprietățile:
a) f este morfism de inele.
b) f este bijectivă.

Observație. Un morfism de inele $f : \mathbf{A} \to \mathbf{A}$ se numește **endomorfism** al inelului **A**, iar un izomorfism de inele $f : \mathbf{A} \to \mathbf{A}$ se numește **automorfism** al inelului **A**.

Aplicații

1. Să se arate că în orice inel comutativ $(A, +, \cdot)$ sunt adevărate egalitățile:

a) $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$;
b) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;
c) $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$.

Soluție. a) $(a - b)(a + b) = aa + ab - ba - bb = a^2 + +ab - ab - b^2 = a^2 - b^2$.
d) $(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
h) $(a + b + c)^2 = (a + b + c)(a + b + c) = a^2 + ab + ac + +ba + b^2 + bc + ca + cb + c^2 = a^2 + ab + ac + ab + b^2 + bc + ac + bc + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$.

2. a) Să se arate că pe $\mathbf{A} = \left\{ x + y \cdot \sqrt{7} \,\middle|\, x, y \in \mathbf{Z} \right\}$ adunarea şi înmulţirea determină o structură de inel.

b) Să se arate că pe $\mathbf{M} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 7y & x \end{pmatrix} \middle| \, x, y \in Z \right\}$ adunarea şi înmulţirea matricelor determină o structură de inel.
c) Să se arate că inelele de la a) şi b) sunt izomorfe.

Soluție. a) și b) Se verifică cu ușurință axiomele inelului.
c) Se stabileşte izomorfismul:

$$f : \mathbf{A} \to \mathbf{M}, f\left(x + y \cdot \sqrt{7}\right) = \begin{pmatrix} x & y \\ 7y & x \end{pmatrix}.$$

11.4 Corpuri

1) Definiția corpului

Un inel $(\mathbf{K}, +, \cdot)$ se numește corp dacă:
a) $1 \neq 0$;
b) $(\forall) x \in \mathbf{K}, x \neq 0$ este simetrizabil.

Dacă în plus legea de compoziție notată multiplicativ este comutativă, atunci corpul se numește comutativ.

Exemple. $(\mathbf{Q},+,\cdot)$, $(\mathbf{R},+,\cdot)$, $(\mathbf{C},+,\cdot)$ sunt corpuri comutative.

Remarcă. Corpurile nu au divizori ai lui 0.

3. Morfisme și izomorfisme de corpuri

Definiție. Fiind date corpurile $(\mathbf{K},+,\cdot)$ și $(\mathbf{K}',*,\mathrm{o})$, se numește **morfism** de corpuri funcția $f:\mathbf{K}\to\mathbf{K}'$, care îndeplinește proprietățile:

1) $f(x+y)=f(x)*f(y)\ (\forall)x,y\in\mathbf{K}$;

2) $f(x\cdot y)=f(x)\mathrm{o}f(y)\ (\forall)x,y\in\mathbf{K}$;

3) $f(e.)=e_{\mathrm{o}}$, unde $e.$ și e_{o} sunt elementele neutre în raport cu operațiile multiplicative din cele două corpuri.

Definiție. Fiind date corpurile $(\mathbf{K},+,\cdot)$ și $(\mathbf{K}',*,\mathrm{o})$, se numește **izomorfism** de corpuri funcția $f:\mathbf{K}\to\mathbf{K}'$, care îndeplinește proprietățile:

a) f este morfism de inele.

b) f este bijectivă.

Aplicații

1. Se consideră $K=\{0,1,a,b\}$ un corp cu 4 elemente. Să se demonstreze relațiile:

a) $ab=ba=1$

b) $a^2=b$.

Soluție. Evident $a\neq 0, a\neq 1, a\neq b, b\neq 0, b\neq 1$.

a) Presupunem că $ab=0\Rightarrow a=0$ sau $b=0$, fals.

Presupunem $ab=a\Rightarrow b=1$, fals.

Presupunem $ab=b\Rightarrow a=1$, fals.

Rezultă atunci că $ab=1$.

b) Presupunem că $a^2=0\Rightarrow a=0$, fals.

Presupunem că $a^2=1\Rightarrow a^2b=b\Rightarrow aab=b\Rightarrow a=b$, fals.

Presupunem că $a^2=a\Rightarrow a=1$, fals.

Rezultă atunci că $a^2=b$.

2. a) Să se arate că pe $\mathbf{A} = \{x + y\sqrt{7} \mid x, y \in \boldsymbol{Z}\}$ adunarea și înmulțirea determină o structură de inel.

b) Să se arate că pe $\mathbf{M} = \left\{\begin{pmatrix} x & y \\ 7y & x \end{pmatrix} \mid x, y \in \boldsymbol{Z}\right\}$ adunarea și înmulțirea determină o structură de inel.

c) Să se arate că inelele de la a) și b) sunt izomorfe.

Soluție. a), b) Se verifică cu ușurință.

c) Se stabilește izomorfismul:

$$f: \mathbf{A} \to \mathbf{M}, f\left(x + y\sqrt{7}\right) = \begin{pmatrix} x & y \\ 7y & x \end{pmatrix}.$$

11.5 Inele de polinoame cu coeficienți într-un corp comutativ (Q, R, C, Z_p, p număr prim)

1. Forma algebrică a unui polinom

Fie $(\mathbf{K}, +, \cdot)$ un corp comutativ. **Forma algebrică a unui polinom** f având nedeterminata X și coeficienții $a_0, a_1, \cdots, a_n$, $a_n \neq 0$ în corpul **K** este: $f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n$.

Observație. Numărul natural n se numește gradul polinomului.

Exemple. a) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = 1 + 5X + 7X^2$ este un polinom de gradul al doilea cu coeficienți în **R**.

b) $f: \boldsymbol{Z_5} \to \boldsymbol{Z_5}, f(x) = \hat{2} + \hat{3}X + X^2 + \hat{4}X^3$ este un polinom de gradul al treilea cu coeficienți în $\boldsymbol{Z_5}$.

2. Valoarea polinomului într-un punct.

Fiind dat polinomul de gradul n:

$$f \in \mathbf{K}[\boldsymbol{X}], f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n, a_n \neq 0$$

și $x \in A$, atunci $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ se numește **valoarea polinomului** f în punctul x.

Exemplu. Fiind dat polinomul $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = 1 + X + +X^2$, atunci $f(2) = 1 + 2 + 2^2 = 7$.

3. Funcția polinomială

Fiind dat polinomul de gradul n:

$f \in \mathbf{K}[X], f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n, a_n \neq 0$ și $x \in A$, atunci funcția $\bar{f} : \mathbf{K} \to \mathbf{K}, \bar{f}(x) = f(x)$ se numește **funcția polinomială** atașată polinomului *f*.

4. Operații cu polinoame.

Teoremă. Fie $(\mathbf{K}, +, \cdot)$ un corp comutativ, $x \in \mathbf{K}$ și polinoamele $f, g \in \mathbf{K}[X]$. Atunci avem:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), fg(x) = f(x)g(x).$$

Exemplu. Pentru $f, g \in \mathbf{R}(X), f(X) = 1 + X, g(X) = 1 - X$ și $x = 2$ avem: $(f + g)(2) = f(2) + g(2) = 3 + (-1) = 2$ și $(fg)(2) = f(2)g(2) = 3 \cdot (-1) = -3$.

Teorema de împărțire cu rest. Fie $(\mathbf{K}, +, \cdot)$ un corp comutativ, și polinoamele $f, g \in \mathbf{K}[X], g \neq 0$. Atunci există polinoamele $q, r \in \mathbf{K}[X]$, unic determinate, astfel încât:

$$f = gq + r, \text{ cu grad}(r) < \text{grad}(g).$$

Observație. Polinomul *f* se numește deîmpărțit, *g* se numește împărțitor, *q* se numește cât și *r* rest.

Exemplu. Fiind date polinoamele: $f, g \in \mathbf{R}[X], f(X) = X^2 + +X + 1$ și $g(X) = x + 1$, folosind algoritmul de împărțire a două polinoame se obține $q(X) = X$ și $r(X) = 1$. Evident avem relația:

$$X^2 + X + 1 = (X + 1) \cdot X + 1.$$

5. Divizibilitatea în inele de polinoame

Definiție. Fie $(\mathbf{K}, +, \cdot)$ un corp comutativ, și polinoamele $f, g \in \mathbf{K}[X]$. Spunem că *f* divide pe *g* și scriem $f \mid g$, dacă există $h \in \mathbf{K}(X)$ astfel încât $g = fh$.

Exemplu. Fiind date polinoamele $f, g \in \mathbf{R}[X], f(X) = X + 1$ și $g(X) = X^2 - 1$, împărțind polinomul *g* la *f* se obține câtul $q(X) = X - 1$ și restul 0 și atunci rezultă că $f \mid g$.

Definiție. Fie $(\mathbf{K}, +, \cdot)$ un corp comutativ, și polinoamele $f, g \in \mathbf{K}[X]$. Un polinom $d \in \mathbf{K}[X]$ se numește cel mai mare

divizor comun al polinoamelor f și g dacă îndeplinește următoarele proprietăți:

a) $d \mid f$ și $d \mid g$;

b) dacă $d' \in \mathbf{K}[X]$ astfel încât $d' \mid f$ și $d' \mid g$ atunci $d' \mid d$.

Notație. Cel mai mare divizor comun al polinoamelor f și g se notează c.m.m.d.c (f, g).

Remarcă. Pentru determinarea celui mai mare divizor comun a două polinoame se folosește algoritmul lui Euclid.

Exemplu. Fiind date polinoamele $f = x^2 - 3x + 2$ și $g = x^2 - 4x + 3$, atunci folosind algoritmul lui Euclid obținem că: c.m.m.d.c $(f, g) = x - 1$.

Definiție. Fie $(\mathbf{K}, +, \cdot)$ un corp comutativ. Polinoamele $f, g \in \mathbf{K}[X]$ se numesc prime între ele dacă c.m.m.d.c $(f, g) = 1$.

Exemplu. Polinoamele $f = x + 1$ și $g = x - 1$ sunt evident prime între ele.

6. Rădăcinile unui polinom

Definiție. Fie $(\mathbf{K}, +, \cdot)$ un corp comutativ. Atunci $a \in \mathbf{K}$ se numește **rădăcină** a polinomului $f \in \mathbf{K}(X)$ dacă $f(a) = 0$.

Exemplu. $x = 1$ este rădăcină a polinomului $f = X^2 - 1$, deoarece $f(1) = 0$.

Teoremă. Fie $(\mathbf{K}, +, \cdot)$ un corp comutativ, $f \in \mathbf{K}[X]$ un polinom și $a \in \mathbf{K}$. Atunci există un unic polinom $g \in \mathbf{K}[X]$ astfel încât $f = (X - a)g + f(a)$.

Remarcă. $f(a)$ reprezintă restul împărțirii polinomului f la $X - a$.

Exemplu. Fiind dat polinomul $f = X^2 + 1$, atunci restul împărțirii polinomului f la $X - 1$ este $f(1) = 2$ și avem relația:

$$f = (X - 1)(X + 1) + 2.$$

Teorema lui Bezout. Fie $(\mathbf{K}, +, \cdot)$ un corp comutativ, $a \in \mathbf{K}$ și $f \in \mathbf{K}[X]$ un polinom. Atunci $X - a \mid f$ dacă și numai dacă a este rădăcină pentru polinomul f.

Teoremă. Se consideră polinomul $f \in \mathbf{Q}[X], f \neq 0$. Dacă numărul $a + \sqrt{b}, a, b \in \mathbf{Q}, b > 0$ și $\sqrt{b} \notin \mathbf{Q}$ este rădăcină a polinomului *f*, atunci și $a - \sqrt{b}$ este rădăcină a polinomului *f*.

Exemplu. Ecuația $x^2 - 2x - 1 = 0$ are rădăcinile: $x_1 = 1 + \sqrt{2}$ și $x_2 = 1 - \sqrt{2}$.

Teoremă. Se consideră polinomul $f \in \mathbf{R}[X], f \neq 0$. Dacă numărul $a + bi \in \mathbf{C} - \mathbf{R}$ și este rădăcină a polinomului *f*, atunci și $a - bi$ este rădăcină a polinomului *f*.

Exemplu. Ecuația $x^2 - 2x + 2 = 0$ are rădăcinile: $x_1 = 1 + i$ și $x_2 = 1 - i$.

7. Polinoame ireductibile

Definiție. Fie $(\mathbf{K}, +, \cdot)$ un corp comutativ. Un polinom $f \in \mathbf{K}[X]$ având $\text{grad}(f) \geq 1$ se numește **reductibil** peste **K** dacă există două polinoame $g, h \in \mathbf{K}[X]$ având $\text{grad}(g) < \text{grad}(f)$ și $\text{grad}(h) < \text{grad}(f)$ astfel încât $f = gh$.

Observație. Un polinom $f \in \mathbf{K}[X]$ având $\text{grad}(f) \geq 1$ și care nu este reductibil peste **K** se numește **ireductibil** peste **K.**

Remarcă. Dacă polinomul $f \in \mathbf{K}[X]$ este **ireductibil** peste **K** și $a \in \mathbf{K}, a \neq 0$, atunci și polinomul af este **ireductibil** peste **K**.

Dacă polinomul $f \in \mathbf{K}[X]$ este **reductibil** peste **K** și $a \in \mathbf{K}$, $a \neq 0$, atunci și polinomul af este **reductibil** peste **K**.

Exemple. a) Orice polinom de gradul întâi $f = aX + b \in \in \mathbf{K}[X], a \neq 0$ este ireductibil peste **K**.

b) Polinoamele $f \in \mathbf{K}[X]$, având gradele 2 sau 3 sunt ireductibile peste **K**, dacă și numai dacă nu au rădăcini în **K**.

c) Polinomul $f = x^2 - 1 \in \mathbf{R}[X]$ este reductibil deoarece 1 și -1 sunt rădăcini ale polinomului f și atunci $f = x^2 - 1 = (x - 1) \cdot \cdot (x + 1)$.

d) Polinomul $f = x^2 + 1$ este irductibil în $\mathbf{R}[X]$ și reductibil în $\mathbf{C}(X)$, deoarece $f = x^2 + 1 = (X - i)(X + i)$.

7. Relațiile lui Viete pentru un polinom de gradul 3

Fie polinomul $f = d + cX + bX^2 + aX^3, a, b, c, d \in \mathbf{K}, a \neq 0$ unde **K** poate fi unul din corpurile **Q**, **R**, **C**. Dacă x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f, atunci avem:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \dfrac{c}{a} \\ x_1x_2x_3 = -\dfrac{d}{a} \end{cases}.$$

Exemplu. Pentru ecuația $x^3 - 2x^2 + 3x - 6 = 0$, relațiile lui Viete sunt:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 3. \\ x_1x_2x_3 = 6 \end{cases}$$

8. Relațiile lui Viete pentru un polinom de gradul 4

Fie polinomul $f = e + dX + cX^2 + bX^3 + aX^4, a, b, c, d, e \in$

$\in \mathbf{K}, a \neq 0$, unde **K** poate fi unul din corpurile **Q**, **R**, **C**. Dacă x_1, x_2, x_3, x_4 sunt rădăcinile polinomului f, atunci avem:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = \dfrac{c}{a} \\ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -\dfrac{d}{a} \\ x_1x_2x_3x_4 = \dfrac{e}{a} \end{cases}.$$

Exemplu. Pentru ecuația $2x^4 - x^3 + 4x^2 - 6x - 16 = 0$, relațiile lui Viete sunt:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=\dfrac{1}{2} \\ x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4=2 \\ x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4=3 \\ x_1x_2x_3x_4=-8 \end{cases}.$$

Aplicații

1. Un polinom împărțit cu $x-1, x+1, x+4$ dă resturile 15, 7, -80. Să se afle restul împărțirii polinomului prin $(x-1)(x+1)(x+4)$.

Soluție. $P(x)=(x-1)(x+1)(x+4)\cdot C(x)+ax^2+bx+c$

$P(1)=a+b+c=15; P(-1)=a-b+c=7;$

$P(-4)=16a-4b+c=-80$. Se rezolvă sistemul.

2. Să se determine $a\in\mathbf{R}$ și să se rezolve ecuația $x^3+2x^2+ax-6=0$ știind că între rădăcinile x_1, x_2, x_3 ale acestora există relația $x_1=x_2+x_3$.

Soluție. a) Avem relațiile lui Viete:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-2 \\ x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=a \\ x_1x_2x_3=6 \end{cases}$$

și relația suplimentară: $x_1=x_2+x_3$. Înlocuind în prima relație obținem: $2x_1=-2\Rightarrow x_1=-1$ și $x_2+x_3=-1$. Din ultima relație $x_2x_3=-6$. Relația a doua se scrie: $x_1(x_2+x_3)+x_2x_3=$ $=a\Rightarrow (-1)(-1)-6=a\Rightarrow a=-5$.

3. Se consideră ecuația $x^3+x^2+x+a=0, a\in\mathbf{R}$ cu rădăcinile x_1, x_2, x_3. Să se arate că oricare ar fi $a\in\mathbf{R}$, între rădăcinile ecuației există relația:

$$x_1+x_2+x_3=x_1^2+x_2^2+x_3^2.$$

Soluție. Conform relațiilor lui Viete avem:

$x_1+x_2+x_3=-1, x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=1\Rightarrow$

$\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3) =$
$= 1 - 2 = -1 = x_1 + x_2 + x_3.$

4. Să se arate că polinomul $P(x) = x^{n+1} - (n+1)x + n$ se divide cu $Q(x) = (x-1)^2$.

Soluție. Evident $P(1) = 1 - (n+1) + n = 0$, de unde rezultă că $P(x)$ se divide cu $x - 1$.
$P(x) = x^{n+1} - x - nx + n = x(x^n - 1) - n(x-1) =$
$= x(x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1) - n(x-1) =$
$= (x-1)(x^n + x^{n-1} + \cdots + x - n) = (x-1)\mathrm{R}(x),$
unde $\mathrm{R}(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x - n$. Avem evident $\mathrm{R}(1) = 0$ și deci $\mathrm{R}(x)$ se divide cu $x - 1$. Rezultă atunci că $P(x)$ se divide cu $(x-1)^2$.

5. Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$ și să se rezolve ecuația:
$$x^4 - (a+2)x^3 - 2x^2 + bx + 1 = 0,$$
știind că admite ca rădăcină pe $x = 2 - \sqrt{3}$.

Soluție. Dacă ecuația admite ca rădăcină pe $x_1 = 2 - \sqrt{3}$, atunci admite ca rădăcină și pe $x_2 = 2 + \sqrt{3}$. Avem atunci:
$x_1 + x_2 = 4$ și $x_1 x_2 = \left(2 - \sqrt{3}\right)\left(2 + \sqrt{3}\right) = 4 - 3 = 1.$
Polinomul de gradul al doilea care are rădăcinile x_1 și x_2 este $x^2 - 4x + 1$. Se împarte polinomul
$x^4 - (a+2)x^3 - 2x^2 + bx + 1$ la polinomul $x^2 - 4x + 1$ și se obține câtul $C(x) = x^2 + (2-a)x + (5 - 4a)$ și restul $\mathrm{R}(x) = (b - 15a + 18)x + 4a - 4$. Punem condiția ca $\mathrm{R}(x) = 0$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$ și rezultă $b - 15a + 18 = 0$ și $4a - 4 = 0$.

Rezolvând obținem: $a = 1, b = -3$.

BIBLIOGRAFIE

1. **Manuale de matematică pentru clasa a IX-a.**

2. Manuale de matematică pentru clasa a X-a.

3. Manuale de matematică pentru clasa a XI-a.

4. Manuale de matematică pentru clasa a XII-a.

5. **Gheorghe Adalbert Schneider,** ***Culegere de probleme de algebră pentru clasele IX - XII***, Editura **Hyperion**, Craiova 2010.

6. **Gheorghe Adalbert Schneider,** ***Matematică – exerciții și probleme pentru clasa a-IX-a,*** Editura **Hyperion**, Craiova 2010.

7. **Gheorghe Adalbert Schneider,** ***Matematică – exerciții și probleme pentru clasa a-X-a,*** Editura **Hyperion**, Craiova 2010.

8. **Gheorghe Adalbert Schneider,** ***Matematică – exerciții și probleme pentru clasa a-XI-a,*** Editura **Hyperion**, Craiova 2010.

9. **Gheorghe Adalbert Schneider,** ***Matematică – exerciții și probleme pentru clasa a-XII-a,*** Editura **Hyperion**, Craiova 2010.

C U P R I N S

1 Mulțimi și elemente de logică matematică 3
1.1 Mulțimea numerelor reale 3
1.1.1 Numere reale 3
1.1.2 Operații algebrice cu numere reale . . . 3
1.1.3 Calcule cu numere reale reprezentate prin litere 4
1.1.4 Ordonarea numerelor reale 6
1.1.5 Modulul unui număr real 7
1.1.6 Aproximări, trunchieri, rotunjiri 8
1.1.7 Partea întreagă și partea fracționară a unui număr real 9
1.1.8 Operații cu intervale de numere reale . . . 10
1.1.9 Inegalități 11
1.2 Elemente de logică matematică 14
1.2.1 Propoziție, predicat cuantificatori 14
1.2.2 Mulțimi. Corelarea elementelor de logică matematică cu operațiile și relațiile cu mulțimi . 16
1.3 Condiții necesare, condiții suficiente 18
1.4 Tipuri de raționamente logice 19
2 Funcții definite pe mulțimea numerelor naturale . . 23
2.1 Șiruri 23
2.2 Progresii aritmetice 23
2.2.1 Noțiunea de progresie aritmetică 23
2.2.2 Formula termenului general al progresiei aritmetice 24
2.2.3 Suma primilor *n* termeni ai unei progresii aritmetice 25
2.2.4 Alte proprietăți ale progresiilor aritmetice 26

2.3 Progresii geometrice 27
2.3.1 Noțiunea de progresie geometrică 27
2.3.2 Formula termenului general al progresiei geometrice 28
2.3.3 Suma primilor *n* termeni ai unei progresii geometrice 29
2.3.4 Alte proprietăți ale progresiilor geometrice 29
3 Funcții, lecturi grafice 31
3.1 Noțiunea de funcție 31
3.2 Funcții numerice 32
3.3 Compunerea funcțiilor 34
4 Funcția de gradul I 36
4.1 Ecuația de gradul I 36
4.2 Funcția afină 36
5 Funcția de gradul al doilea 40
5.1 Ecuația de gradul al doilea 40
5.2 Funcția de gradul al doilea 42
6 Mulțimi de numere 47
6.1 Numere reale 47
6.1.1 Puteri cu exponent întreg 47
6.1.2 Radicali 47
6.1.3 Puteri cu exponent rațional 51
6.1.4 Puteri cu exponent real 51
6.2 Logaritmi 52
6.3 Mulțimea numerelor complexe 55
6.3.1 Numere complexe sub formă algebrică . 55
6.3.2 Reprezentarea geometrică a numerelor complexe 58
6.3.3 Rezolvarea de ecuații în C 60
7 Funcții și ecuații 62
7.1 Funcții și ecuații 62
7.1.1 Injectivitate, surjectivitate, bijectivitate.

Funcții inverse 62
7.1.2 Funcția putere cu exponent natural 64
7.1.3 Funcția radical 64
7.1.4 Funcția exponențială 65
7.1.5 Funcția logaritmică 66
7.2 Ecuații 66
7.2.1 Ecuații, inecuații și sisteme de ecuații iraționale 66
7.2.2 Ecuații, inecuații și sisteme de ecuații exponențiale 69
7.2.3 Ecuații, inecuații și sisteme de ecuații logaritmice 71
8 Metode de numărare 74
8.1 Mulțimi finit ordonate 74
8.2 Permutări 75
8.3 Aranjamente 75
8.4 Combinări 75
8.5 Binomul lui Newton 76
9 Elemente de probabilități 78
9.1 Evenimente. Operații cu evenimente 78
9.2 Probabilitatea unui eveniment 79
9.3 Proprietăți ale probabilităților 80
9.4 Probabilități condiționate 80
9.5 Evenimente independente 81
9.6 Schema lui Poisson 81
9.7 Schema lui Bernoulli 82
9.8 Variabile aleatoare 82
10 Elemente de calcul matriceal și sisteme de ecuații liniare 85
10.1 Permutări 85
10.2 Matrice 86
10.3 Determinanți 89
10.4 Matrice inversabile 91

10.5 Rangul unei matrice 92
10.6 Sisteme de ecuații liniare 93
11 Structuri algebrice 97
11.1 Legi de compoziție 97
11.2 Grupuri 102
11.3 Inele 107
11.4 Corpuri 110
11.5 Inele de polinoame cu coeficienți într-un corp comutativ (**Q, R, C,** $\boldsymbol{Z_p}$**,** $\boldsymbol{p}$ număr prim) 112

Tiparul executat la
EDITURA HYPERION
CRAIOVA
Str. Florilor Nr. 15